HIDRÁULICA DE LOS CANALES

HIDRAULICA DE LOS CANALES

Sergio Culaciati Ríos
Barcelona 17-IV-50

BORIS A. BAKHMETEFF

Profesor de la Universidad de Columbia. Ex profesor del Instituto Politécnico de Petrogrado (Rusia). Miembro de la Sociedad Americana de Ingenieros Civiles, de la Sociedad Americana de Ingenieros Mecánicos y de la Sociedad Canadiense de Ingenieros Civiles

HIDRAULICA DE LOS CANALES

Traducción del inglés por

MARIANO DE LA HOZ

Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

Revisión y nota preliminar por

DOMINGO DIAZ-AMBRONA MORENO

Ingeniero de Caminos y Abogado



AGUILAR. EDITOR. MADRID

La edición original de esta obra se ha hecho por la Casa editorial MacGraw Hill Book Company, Inc., de Nueva York y Londres, con el título de

HIDRAULICS OF OPEN CHANNELS

IMPRESO EN ESPAÑA - PRINTED IN SPAIN

NUEVAS GRAFICAS, S. A. - RODRIGUEZ SAN PEDRO, 39 - MADRID

PROLOGOS

NOTA PRELIMINAR

Se inicia con este libro la publicación de una serie de obras técnicas sobre Ingeniería que, por el prestigio mundial de sus autores y por reflejar los últimos adelantos de las diversas ramas de esta disciplina, esperamos contribuyan a llenar un vacío universalmente sentido en la bibliografía técnica de lengua castellana.

Pocos libros pudieran iniciar una serie de esta categoría con más méritos que esta traducción de la obra de Boris A. Bakhmeteff, cuyo título original es el de Hidraulics of open Channels. *El tema no puede ser de mayor actualidad y trascendencia en España e Hispanoamérica. El autor, consagrado durante toda su vida al estudio y enseñanza de la materia de que trata el libro, desde sus tiempos del Instituto Politécnico de Petrogrado, antes de 1918, hasta su profesorado en la Columbia University, de los Estados Unidos, ha sabido unir las excelencias de una sencilla exposición didáctica, plena de elegancia y claridad, a un sentido eminentemente práctico, y todo ello conjugado con el máximo rigor científico. El monograma de la* Engineering Societies Monographs, *inscrito en la portada, viene a ser como el fiel contraste que garantiza su solvencia científica.*

Se abordan en la obra todos los problemas que puede encontrar en su práctica profesional el ingeniero especialista en Hidráulica, y se desarrollan, tanto numéricamente como en teoría, las soluciones de cada uno de ellos. El autor se vale de las tablas de la función del régimen variado, calculadas por él mismo, y en las que interviene su concepción original del exponente hidráulico, número que condensa las características de la sección que se estudia.

La versión al castellano es obra del ingeniero señor De la Hoz, técnico dedicado exclusivamente a la especialidad hidráulica, y se ha inspirado en un sentido de servicio a todos los técnicos de habla castellana de ambos continentes. Dentro de la absoluta fidelidad e integridad del texto original, ha tendido en todo momento a hacer el libro lo más útil posible. La traducción, en unidades del sistema métrico decimal, de los numerosos ejemplos planteados en el original en unidades de otro sistema ha implicado la resolución de todos y cada uno de ellos, con la correspondiente construcción de tablas y ábacos. Esto supone una segunda versión, seguramente más profunda y dificultosa que la del idioma, pero que aumenta de manera notable la utilidad y accesibilidad de este libro que el lector tiene entre las manos para todos los técnicos de habla castellana a quienes va dedicado y para cuantos, sin tener el castellano como idioma vernáculo, utilizan el sistema métrico decimal.

DOMINGO DÍAZ-AMBRONA Y MORENO.

PROLOGO DEL AUTOR

La práctica de la Ingeniería impone en nuestros días métodos de aproximación más profundos y sutiles que los que se emplearon en el pasado y todavía aparecen incorporados a los tratados usuales de Hidráulica, constituyendo la materia de los cursos tradicionales en múltiples centros de enseñanza (1). En efecto: la mecánica de las estructuras ha evolucionado hacia la "elasticidad aplicada", y el proyecto de máquinas requiere el análisis vibratorio y otros aspectos de alta dinámica. Las nociones de turbulencia, cavitación y circulación son la avanzada de la investigación hidrodinámica que viene aplicándose con éxito a problemas de Aeronáutica y maquinaria hidráulica.

En el campo de la Ingeniería Hidráulica y, en particular, en aquel dominio más importante donde el Ingeniero civil se enfrenta con el régimen libre (no forzado) de los flúidos, la orientación se ha desviado de las nociones rudimentarias del movimiento uniforme. Puntos de vista más amplios, que abarcan el régimen variado en canales abiertos, el resalto hidráulico, las intumescencias en los canales, etc., han pasado a ser tópicos de discusión en la literatura hidráulica que al acercar opiniones acrece los conocimientos. Por otro lado, la investigación en laboratorio sobre modelos reducidos de las estructuras ofrece los más fructíferos resultados. Aquí también las nociones elementales, tal como se presentan en los viejos tratados, relativas al régimen del agua a través de orificios, sobre vertederos, etc., han sido reemplazadas por un estudio más profundo y detallado de las circunstancias físicas del movimiento. Ilustra la tendencia presente en este campo el impor-

(1) En el original dice textualmente «en las Escuelas de Ingeniería». Destinado el libro a nuestro país, donde a nuestras Escuelas Especiales no es aplicable la opinión del autor, nos parece más fiel la traducción dada, toda vez que puede abarcar a Escuelas de Ingeniería de otros países.

tantísimo resumen Prácticas hidráulicas de Laboratorio, *cuya versión americana ha aparecido recientemente bajo la inteligente dirección de John Freeman. Un fruto prometedor ha sido la creación del Laboratorio Nacional de Hidráulica en Washington D. C.*

Por lo que se refiere a los proyectos hidráulicos con los que tiene que enfrentarse el Ingeniero civil, el hecho es que el movimiento uniforme rara vez se presenta en la práctica. Sólo será posible un conocimiento exacto del funcionamiento de un sistema hidráulico cuando los fenómenos se consideren y los proyectos se enfoquen bajo la hipótesis de régimen variado. Por desgracia, como afirma el Prof. Daugherty en su Treatise on Hydraulics, *"no existe un modo satisfactorio y seguro de tratar el problema del régimen no uniforme". Esto significa, por supuesto, un modo de considerar el tema que abra el camino a las investigaciones prácticas, en tanto avanzan las bases teóricas del régimen variado y adquieren una firmeza que las haga a la trascendental aportación de los hidráulicos franceses del siglo XIX.*

El presente libro es un intento de llenar este vacío, al menos en parte, y ofrecer un manual que presente la materia del régimen variado de forma útil para los proyectos y la práctica del Ingeniero. El origen de este trabajo se remonta a los días de la preguerra (1). El autor, conectado entonces con las vastas empresas hidráulicas de Rusia, acometió la tarea de aclarar múltiples y embrollosos fenómenos relacionados con el régimen variado y de resolver de una manera comprensible diferentes cuestiones prácticas. El resultado cristalizó en la publicación de un libro sobre El régimen variado en canales a lámina libre *(2), editado en ruso en 1912.*

En esta obra, al tratar los aspectos físicos del movimiento flúido, se utilizó con mucha frecuencia la noción de "energía específica del régimen" es decir, la altura de la línea de energía, referida al fondo de la sección transversal del canal. Este concepto simple sirvió para dar una explicación diáfana de muchas cuestiones complejas interpretadas anteriormente sólo

(1) La de 1914-18.

(2) *O Neravnomernom Dwijenii Jidkosti v Otkritom Rusle*. San Petersburgo, 1912.

desde un punto de vista analítico abstracto. De este modo se dotó de fundamento físico al concepto de calado crítico, se explicó de manera sencilla el resalto hidráulico y se dió una interpretación clara de los diferentes tipos de curvas de lámina libre. Desde 1912 este "criterio energético" ha sido desentrañado y usado ventajosamente por diferentes autores, al parecer con independencia unos de otros. En efecto: es mencionado por Rehbock (1) y presentado brillantemente por Hinds (2). El autor, sin embargo, no tiene noticia de ninguna publicación que alcance prioridad sobre la edición rusa en cuanto al empleo del referido criterio.

El libro ruso contenía también la sugerencia de un nuevo método de cálculo de los diferentes tipos de curvas de lámina libre correspondientes al régimen variado. Hasta ahora la ecuación diferencial ha sido aplicada e integrada solamente para ciertos perfiles transversales "idealizados", para los cuales se han dado tablas numéricas por Bresse, Tolkmiff, Rühlmann y otros. Aun cuando esas tablas representan un avance considerable, se limita, sin embargo, notablemente su ámbito de aplicación por la sencilla razón de que las secciones "idealizadas" tienen poco de común con las formas prácticas de los canales que el ingeniero ha de manejar frecuentemente.

El método sugerido por el autor es aplicable a canales de cualquier forma práctica. Se basa en una relación exponencial que se ha encontrado rige (con aproximación suficiente) el régimen en una conducción abierta, para niveles variables. La posibilidad de aplicación y la utilidad del método dependen, sin embargo, del cálculo de las tablas y de la que en este libro denominamos "función del régimen variado", cuya preparación para diferentes valores del exponente representa una larga e ímproba tarea. Este trabajo se emprendió y perfeccionó, al principio, entre 1914 y 1915, por la Junta de Investigaciones del entonces Servicio Ruso de Riegos, bajo la dirección del autor. La revolución, con sus disturbios, hizo inútil para el autor el trabajo ya realizado, al creerlo, por algún tiempo, totalmente perdido, de suerte que hubo de recomenzarse la tarea, llevándose a cabo en la forma que se

(1) *Betrachtungen über Abfluss, Stan und Walzenbildung*, Berlín, 1917.

(2) *Eng. News- Record*, vol. 85, pág. 1034, 1920.

ofrece aquí, por el Profesor Kholodovsky y en parte por el Doctor Pestrecov (1).

Los artículos que se presentan al lector en el presente volumen han sido totalmente rehechos, siendo nueva e inédita la mayor parte del material. En general se aspira a la obtención de resultados prácticos, absteniéndose de exposiciones de carácter puramente teórico, para dar paso a las de carácter elemental con miras, ante todo, a conseguir una interpretación diáfana de los aspectos físicos del régimen variado.

La mayor parte de este libro se dedica a la resolución de ejemplos prácticos. La experiencia enseña que en el estudio del régimen variado, así como en muchas otras ramas de la mecánica aplicada, no puede dominarse la materia sin familiarizarse por completo con los procedimientos numéricos. En efecto: hay múltiples circunstancias que escapan a la síntesis en fórmulas generales y que solamente pueden estipularse como reglas y conclusiones extraídas de la experiencia acumulada. Por tales razones es preferible considerar los ejemplos numéricos no como meras ilustraciones, sino, al menos algunos de ellos, como parte orgánica de la exposición general de la materia. La experiencia ha enseñado también al autor que, sin que importe su simplicidad mayor o menor, las nociones relativas al régimen variable y a los métodos de abordar los problemas requieren, por parte del novicio, cierta dosis de perseverante aprendizaje antes de familiarizarse con ella. Esto explica y en parte justifica la abundancia y detalle de los ejemplos, en los que necesariamente son a veces laboriosos los cálculos, no pudiendo evitarse en algunos casos el incurrir en repeticiones.

El autor no pretende haber agotado el tema. Muchos problemas son demasiado complicados para poder encajarlos en normas prácticas; en otros casos el estado actual de la ciencia es deficiente. Sin embargo, por la experiencia adquirida puede asegurarse que los métodos e ideas expuestos permiten la solución de múltiples problemas de una forma relativamen-

(1) Interin, fué reeditado en 1928 en Leningrado el texto ruso. Esta nueva edición, a la que fué ajeno el autor, se completó con las tablas de 1914-1915. Las tablas que se han calculado para la presente obra son más precisas y completas.

te sencilla y comprensible. Se ha dicho que el progreso en la Ingeniería teórica es un avance en la ruta del "pensamiento". El autor está plenamente convencido de la importancia que tiene para el Ingeniero hidráulico el aprender a "pensar" en régimen variado y de aplicar este sentido a los casos prácticos que en su cometido cotidiano se presenten.

BORIS A. BAKHMETEFF.

GREENHILLS, BROOKFIELD,
CONNECTICUT.

INDICE GENERAL

INDICE GENERAL

SEGUNDA PARTE

APLICACIONES PRACTICAS

TERCERA PARTE

HIDRAULICA DEL RESALTO

APENDICES

TABLAS DE LA FUNCION DEL REGIMEN VARIADO

LAMINAS

SIMBOLOS

Las unidades empleadas son el metro, kilogramo y segundo, y derivadas de ellas (1).

Las operaciones se han realizado en gran parte con auxilio de la regla de cálculo.

y, d	Calado o nivel.
a	Area de la sección transversal del canal.
b	Anchura en la superficie.
p	Perímetro mojado.
R	Radio hidráulico.
C	Coeficiente de rozamiento de Chézy.
v	Velocidad media.
Q	Gasto o caudal.
s_0	Pendiente del fondo o solera.
s	Pendiente superficial.
y_0, d_0	Calado normal (correspondiente al régimen uniforme).
W	Trabajo.
W_r	Trabajo de rozamientos.
N	Potencia.
y_{cr}, d_{cr}	Calado crítico.
$\delta = a/b$	Calado medio.
v_{cr}	Velocidad crítica.
Q_{cr}	Caudal crítico.
$\sigma = \frac{g}{C^2} \cdot \frac{p}{b}$	Pendiente crítica.
σ_0	Pendiente crítica para el calado normal.
σ_{cr}	Pendiente crítica para el calado crítico.
Δ	Peso de la unidad de volumen de líquido.
e	Altura de la línea de energía=energía por unidad de peso referida a una línea de referencia.
ϵ	Energía específica=altura de la línea de energía con relación a la solera de una sección.
$\mathfrak{K} = aC\sqrt{R}$	Coeficiente de gasto de una sección.
n	Exponente hidráulico.

---

(1) En el texto inglés se emplea pie-libra-segundo, lo que ha complicado considerablemente la traducción al tener que resolver los numerosísimos problemas partiendo de datos expresados en el sistema métrico, no habiendo podido utilizarse la mayoría de las tablas numéricas ni de las figuras del original. (*N. del T.*)

$\mathfrak{M}=a\sqrt{a/b}$	La función $\mathfrak{M}$.
λ	Factor cinético del régimen.
l_{m-n}	Longitud de un arco o tramo entre los perfiles m y n.
L_m	Distancia del perfil m al origen.
$\eta=y/y_0$	Relación del calado variable al normal.
$B(\eta)=-\int_0^{\eta}\frac{d\eta}{\eta^n-1}$	La función del régimen variado.
$\beta=s_0/\sigma$	La relación que se expresa
$\tau=y/y_{cr}$	La relación que se expresa.
$\delta=\sigma_c/\sigma$	La relación que se expresa.
$T(\tau)$	Función del régimen variado de un canal con solera horizontal.
d_1 y d_2	Calados conjugados antes y después del resalto.
j	Altura del resalto.
ϵ_1 y ϵ_2	Energía específica antes y después del resalto.
ϵ_j	Pérdida de energía en el resalto.
c	Celeridad de propagación de una onda de traslación.
h	Altura de una intumescencia o de una onda de traslación.
z_0	Profundidad del centro de gravedad de una sección.
$M(y)=az_0+\frac{Q^2}{ag}$	La función M'.
P	Altura de la coronación de un vertedero.
H	Altura sobre la coronación de un vertedero.
Z	Diferencia de niveles antes y después de un vertedero.
t	Calado aguas abajo de una presa o vertedero.
α	Coeficiente de contracción.
φ	Coeficiente de velocidad.
ζ	Coeficiente de rozamiento.
μ	Coeficiente de gasto.

Al aludir en los ejemplos a las «tablas» se refiere concretamente a las tablas de la *función del régimen variado*.

INTRODUCCION

CAPITULO PRIMERO

DEFINICIONES

1. Movimiento uniforme.—Se dice que el movimiento de un líquido en un canal de lámina libre es *uniforme* cuando el calado y demás características del movimiento, tales como el área a de la sección transversal (fig. 1), la velocidad v y la pendiente hidráulica s permanecen constantes de una sección a otra. En este caso la superficie libre es

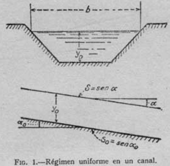


Fig. 1.—Régimen uniforme en un canal.

paralela al fondo del canal, y la pendiente de éste, igual, por tanto, a la pendiente hidráulica.

En consecuencia, el movimiento uniforme en sentido estricto sólo puede producirse en canales prismáticos, es decir, de sección transversal y pendiente invariables. Los ríos y corrientes naturales no suelen presentar estas características, y, por tanto, no se produce en ellos el movimiento estrictamente uniforme.

En un canal que pone en comunicación dos depósitos

(fig. 2), el movimiento será uniforme cuando los niveles en A y B sean tales que los calados y_1 e y_2, al principio y final del canal, sean iguales. En tal caso, suponiendo el canal prismático, el calado en cualquier sección comprendida entre la 1 y la 2 será el mismo, de forma que para cualquier sección $y=y_1=y_2$.

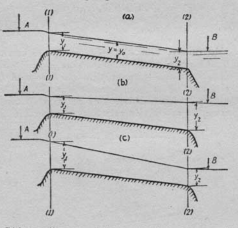


FIG. 2.—Régimen uniforme y variado en un canal que pone en comunicación dos depósitos.

2. MOVIMIENTO NO UNIFORME O VARIADO.—Cuando las características del movimiento varían de una sección a otra, el movimiento se convierte en *no uniforme* o *variado*.

El ejemplo clásico que se suele presentar es el de la curva de remanso producida por una presa. La superficie libre (fig. 3) primitiva ABC... se traslada a la posición A', B', ... E'. La sobreelevación Z disminuye hacia aguas arriba, aproximándose asintóticamente la curva de remanso a la de la lámina primitiva. Aun cuando este caso es el único ejemplo que se suele citar en los libros de hidráulica, existe multitud de casos en los que se presentan problemas de movimiento variado, que tiene que resolver el ingeniero al proyectar estructuras hidráulicas. Por ejemplo, el mo-

vimiento en el canal de la figura 2, cuando los calados y_2 e y_1 no son iguales. Supongamos que $y_2 > y_1$, como en la figura 2 (*b*); el calado aumentará aguas abajo, el movimiento será variado y tendrá lugar con formación de una *curva de enlace ascendente*. Si, por el contrario, como en la figu-

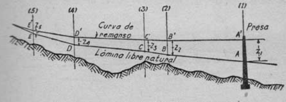


FIG. 3.—Curva de remanso en una corriente natural.

ra 2 (*c*), $y_2 < y_1$, el calado irá decreciendo, formándose una curva descendente. Otro caso importante es el de la figura 4, en que se regula la entrada en el canal mediante una compuerta. Según la abertura de la misma y el caudal, variará el calado y_2. AB' corresponde al caso de movimiento variado con curva ascendente, y AB'' corresponde a curva

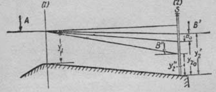


FIG. 4.—Régimen variado en un canal regulado por una compuerta.

descendente. Entre ambos se encuentra el movimiento uniforme cuando $y_2 = y_1$.

Los casos esquemáticos en las figuras 2 y 4 sintetizan uno de los problemas más importantes relacionados con el movimiento variado, es decir, la determinación de la variación del gasto de un canal al variar los niveles del agua en sus extremos.

Comparando las figuras 2 y 3, se percibe otra diferencia. En un curso natural de agua (fig. 3), la sección transversal, y prácticamente todas las características del movimiento, varía de una sección a otra; el movimiento no es uniforme en la verdadera acepción de la palabra. Lo mismo se aplica a la figura 5, que representa un canal divergen-

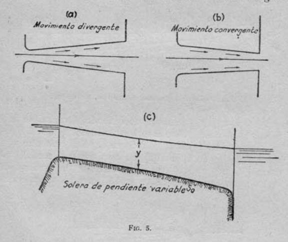


Fig. 5.

te (fig. 5, *a*) o convergente (fig. 5, *b*) o con solera de pendiente variable (fig. 5, *c*).

En contraposición con la figura 5, el canal de las figuras 2 y 4 se supone con sección de forma invariable y solera con pendiente constante s_0, por lo que el movimiento se denomina *movimiento variado en un canal prismático*. En el estado actual de la ciencia, el movimiento variado en canales prismáticos constituye el caso más importante, al que se dará preferencia en este libro.

3. Movimiento variable.—El movimiento variado, e implícitamente el uniforme, constituyen el movimiento permanente. Este no es función del tiempo; el calado, la velocidad y demás características, aun cuando varían de una

sección a otra, permanecen invariables con el tiempo. Cuando varían con el tiempo, el movimiento se denomina *variable*. Tal sucede, por ejemplo, en el caso de las olas y en el de las ondas solitarias o intumescencias provocadas en los canales por un cierre brusco en los mismos. También, en el caso de la figura 2, cuando los niveles A y B no permanecen constantes y los calados y_1 e y_2 varían con el tiempo, el movimiento es variable.

En el estado actual de la ciencia, los problemas que se presentan en la práctica de movimiento variable sólo tienen solución en un número limitado de casos, y aun en éstos sólo en forma simplificada y aproximada.

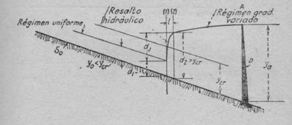


FIG. 6.—Curva de remanso transformada en resalto hidráulico, en el caso de pendiente fuerte del fondo.

4. EL RESALTO HIDRÁULICO.—En 1820, Bidone demostró que las curvas de remanso no siempre toman la forma representada en la figura 3, es decir, de curva continua tangente al perfil natural de la lámina. En efecto, cuando el fondo de la corriente es suficientemente pendiente, el fenómeno se produce como indica la figura 6. Después de transcurrir el movimiento de una manera normal, hasta una sección que en la figura 6 es la 1, la lámina pasa repentinamente del calado d_1 al d_2 en la sección 2. Este curioso fenómeno, tenido por largo tiempo como paradójico, es el *resalto hidráulico*. Representa una solución de continuidad del movimiento. Pasada la sección 2, la superficie es continua y la variación del calado gradual y lenta.

Otro ejemplo de resalto se representa en la figura 7, en donde el agua pasa a gran velocidad bajo una compuerta.

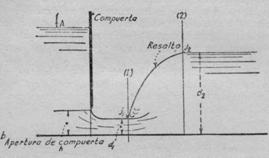


FIG. 7.—Resalto hidráulico en un canal detrás de una compuerta reguladora.

El resalto tiene lugar entre el calado d_1, próximo a la *vena contracta*, y el d_2, que puede ser superior al d_1.

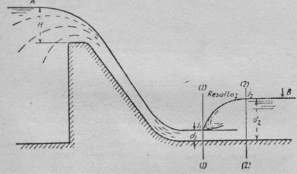


FIG. 8.—Resalto hidráulico al pie de un vertedero.

La figura 8 representa el caso del resalto al pie de un vertedero, mediante el cual se produce el enlace de la lámina vertiente con la corriente aguas abajo.

5. LA DEPRESIÓN HIDRÁULICA.—En la figura 9 se representa un canal con un ensanchamiento brusco en la sección 0, siendo los calados anterior y posterior, respectivamente, y_1 e y_2. La transición se realiza mediante un descenso algo escarpado de la superficie, fenómeno que denominaremos *depresión hidráulica*. Caracteriza la depresión el que el calado en la zona estrecha del canal no baja de cierto valor, y_c, que no viene afectado por el régimen en la parte ensanchada. Por tanto, en el caso de que el nivel del agua en la zona ensanchada sea B' en lugar de B, con

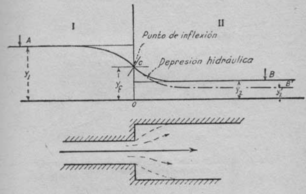


FIG. 9.—Depresión hidráulica motivada por un ensanchamiento de la sección del canal.

un calado y'_2, ello no afectará al perfil de la lámina libre aguas arriba de C. Este punto C representa, por tanto, un límite del descenso que puede experimentar la lámina en el movimiento sin obstrucción con formación de depresión hidráulica. Como indica la figura 9, C es el punto de inflexión de la curva de enlace.

Otro ejemplo de depresión hidráulica es el de un canal en que la solera pasa bruscamente de una pendiente suave a una fuerte; el calado y_{cr}, correspondiente al punto anguloso de la solera, alcanza el valor mínimo posible en la

zona primera del canal, y el punto C es el de inflexión de la curva de enlace.

6. FENÓMENOS LOCALES Y MOVIMIENTO GRADUALMENTE VARIADO.—La depresión y el resalto hidráulicos se caracterizan por un cambio rápido de las circunstancias del movimiento que tiene lugar en una longitud relativamente corta. En este aspecto hay que distinguirlos del movimiento representado en las figuras 2, 3 y 4, en donde un cambio apreciable de calado tiene lugar a lo largo de una longitud considerable; éste, siguiendo a Boussinesq, puede calificarse de *movimiento paulatina o gradualmente variado*,

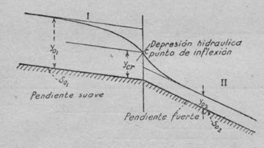


FIG. 10.—Depresión hidráulica motivada por un aumento de la pendiente de la solera, que pasa de *suave* a *fuerte*.

mientras que en los casos en que la transición se verifica de una manera brusca emplearemos el calificativo general de *fenómenos locales*.

Una corriente de agua en donde son variables las características del movimiento puede considerarse dividida en zonas sucesivas, donde el movimiento es gradualmente variado, alternadas con fenómenos locales. En la figura 11, si bien de una manera artificiosa, se ilustra convenientemente esto con un ejemplo, donde las zonas correspondientes al movimiento gradualmente variado están separadas por otras relativamente más cortas, correspondientes a los fenómenos locales.

En lo sucesivo designaremos por la letra d los calados co-

rrespondientes a los fenómenos locales, y por la letra *y* los correspondientes al movimiento gradualmente variado.

La figura 11 sirve para ilustrar el carácter de los problemas que esperamos resolver con una *teoría* del movimiento variado. Supongamos, en efecto, que se conocen los respectivos tramos, sus dimensiones y demás características de las diferentes estructuras. Supongamos, además, que se

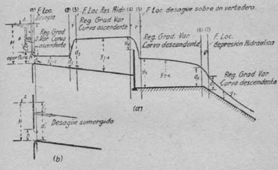


FIG. 11.—Régimen gradualmente variado alternado con *fenómenos locales*.

da la posición del nivel inicial *A*, así como la abertura de la componente *h*. La primera cuestión que se presenta es determinar el esquema general hidráulico, es decir, el tipo y aspecto general de la lámina libre en los diversos trayectos y la forma específica de ésta en los fenómenos locales. Por ejemplo, se precisa la determinación previa, según las circunstancias que sirven de datos, de si el resalto al pie del vertedero es *anegado*, como en la figura 11, *a* (secciones 4-5), o *libre*, como en la figura 8, y lo mismo en el caso de una compuerta si es *libre*, como en la figura 11, *a* (secciones 1-2), o *sumergido*, como en la figura 11, *b*. El que sea de una u otra forma afectará, evidentemente, al caudal fluyente y también, por tanto, la forma del movimiento en todo el sistema.

Después de establecido el tipo general de movimiento, la etapa siguiente consiste en determinar con suficiente pre-

cisión las magnitudes numéricas, los calados en las secciones que separan los fenómenos locales de los tramos adyacentes y la forma precisa de la lámina libre en las zonas donde el movimiento es del tipo gradualmente variado. Los métodos que se exponen en este libro permiten, hablando de una manera general, la solución de problemas de esta índole con suficiente grado de aproximación para las aplicaciones prácticas.

PRIMERA PARTE

TEORIA DEL REGIMEN GRADUALMENTE VARIADO

CAPITULO II

MOVIMIENTO UNIFORME

En este capítulo se exponen las nociones relativas al movimiento uniforme, con las que se está familiarizado por los tratados elementales de Hidráulica, pero expuestas de una manera más conveniente para desarrollar el estudio que haremos del régimen variado.

7. Coeficiente de gasto de la sección transversal de un canal.—Suponiendo que en un canal, de calado y_0, se ha establecido el régimen uniforme, la velocidad media del agua es, según la fórmula de Chézy:

$$v=C\sqrt{R}\sqrt{s_0} \qquad [1]$$

y el caudal Q:

$$Q=aC\sqrt{R}\,.\,\sqrt{s_0} \qquad [2]$$

donde:

a = superficie mojada.

$R=\dfrac{a}{p}$ = radio hidráulico; p = perímetro mojado.

s_0 = pendiente de la solera.

C = factor de velocidad de Chézy, determinable mediante las fórmulas de Ganguillet-Kutter, Bazin, Manning u otras empíricas.

Designando

$$aC\sqrt{R}=\mathfrak{K} \qquad [3]$$

se tiene, por la ecuación [2]:

$$Q=\mathfrak{K}\sqrt{s_0}\,;\quad s_0=Q^2/\mathfrak{K}^2 \qquad [4]$$

Para un canal dado $\mathfrak{K}$ es función del calado y. Puede di-

también es función de s_0, según Ganguillet-Kutter

bujarse la curva $\mathfrak{K}=f(y)$ (fig. 12), que permite obtener el

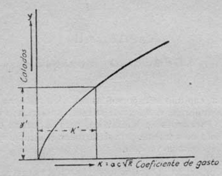


FIG. 12.—Curva de coeficientes de gasto $\mathfrak{K}=aC\sqrt{R}=f(y)$.

caudal Q para una cierta ordenada y multiplicando el valor correspondiente de $\mathfrak{K}$ por $\sqrt{s_0}$.

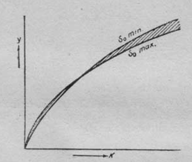


FIG. 13.—Curvas coeficientes de gasto en el caso de emplearse la fórmula de Ganguillet-Kutter.

Como $s_0=\text{sen}\ \alpha_0$ es una magnitud adimensional, las dimensiones de $\mathfrak{K}$ son las de un caudal (L^3/T). $\mathfrak{K}$ mide la can-

tidad de líquido transportado por el canal en una unidad de tiempo, en la hipótesis de que $\sqrt{s_0}=1$. Designaremos $\mathfrak{K}=f(y)=aC\sqrt{R}$ por el término capacidad de gasto o coeficiente de gasto de una sección transversal.

De una manera general, $\mathfrak{K}$ es una característica inherente a la sección geométrica del canal. Si el factor de velocidad C se determina mediante una fórmula independiente de s_0, tal como las de Bazin o Manning, la curva de *coeficientes de gasto* es válida para todas las pendientes usuales. Si se emplea la fórmula de Ganguillet-Kutter, en la que C depende (si bien ligeramente) de s_0, el diagrama de *coeficientes de gasto* se representa en la figura 13 por el área rayada, limitada por los valores extremos de s: $s_{0\,\min}$ y $s_{0\,\max}$ (1). Los ejemplos que siguen familiarizarán al lector con estas nociones.

EJEMPLO 1.°

Cuestión 1.ª Dibujar las curvas de coeficiente de gasto del canal representado en la figura 14, suponiendo revestimiento de mortero, correspondiente al coeficiente de G. K.

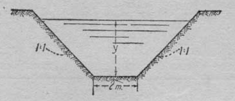


FIG. 14.—Sección transversal del canal del tipo *B*.

(1) No queremos en esta ocasión suscitar la tan debatida cuestión del valor relativo de las diferentes fórmulas empíricas La gran ventaja de la fórmula de G. K., en otros muchos aspectos insostenible, es la abundancia de datos experimentales que han sido reducidos a forma de coeficientes de G. K. Sin embargo, los coeficientes experimentales de G. K. pueden emplearse de una manera expedita en una fórmula exponencial del tipo de la de Manning. (Véase Art. 32.)

$n = 0{,}013$ y al de Bazin $\gamma = 0{,}30$. Al aplicar la fórmula de G. K. considérense como pendientes límites $s_{0\,max} = 0{,}001$ y $s_{0\,min} = 0{,}0001$.

Los resultados de aplicar la fórmula de Bazin

$$C = \frac{87}{1 + \frac{0{,}30}{\sqrt{R}}}$$

se condensan en la Tabla I, y los valores de $\mathfrak{K}$ correspondientes se representan gráficamente en la figura 15.

TABLA I

y	a	p	R	C	$\mathfrak{K}$
0,5	1,25	3,414	0,366	58,155	42,220
1,0	3,00	4,828	0,621	62,998	148,927
1,5	5,25	6,243	0,841	65,561	315,627
2,0	8,00	7,657	1,045	67,285	550,122
2,5	11,25	9,071	1,240	68,557	858,419
3,0	15,00	10,485	1,431	69,544	1247,619
3,5	19,25	11,899	1,618	70,388	1719,456
4,0	24,00	13,314	1,803	71,136	2291,148
4,5	29,25	14,728	1,986	71,723	2951,742
5,0	35,00	16,142	2,168	72,259	3722,789
5,5	41,25	17,556	2,350	72,803	4603,789
6,0	48,00	18,970	2,530	73,232	5592,581

Los valores de C según la fórmula de G. K. y los correspondientes de $\mathfrak{K}$ se acompañan en la Tabla II, y se representan en la figura 15 con líneas punteadas.

Tabla II

y	$s_0 = 0{,}001$		$s_0 = 0{,}0001$	
	c	$\mathfrak{K}$	c	$\mathfrak{K}$
0,5	56,726	42,899	53,821	40,702
1,0	62,178	146,989	60,684	143,456
1,5	65,108	313,446	64,558	310,798
2,0	67,119	548,765	67,285	550,122
2,5	68,583	858,745	69,325	868,036
3,0	69,737	1251,082	70,914	1272,197
3,5	70,765	1728,665	72,329	1766,871
4,0	71,654	2307,832	73,594	2370,315
4,5	72,336	2976,970	74,586	3069,568
5,0	72,972	3759,517	75,550	3892,336
5,5	73,621	4655,516	76,484	4836,561
6,0	74,099	5658,792	77,214	5896,679

Cuestión 2.ª En el canal anterior, determinar el caudal cuando $y_0 = 3{,}5$ m. y $s_0 = 9\ ^{00}/_{00}$.

Nota. El signo $^{00}/_{00}$, empleado para indicar la pendiente, significa que ésta viene dada en diezmilésimas. Conviene emplear esta unidad con miras a facilitar la extracción de la raíz cuadrada. Si la pendiente es $s_0\ ^{00}/_{00}$, su raíz cuadrada es $\sqrt{s_0\ ^{00}/_{00}} = \sqrt{s_0} \cdot 10^{-2}$. Por otra parte, como $\mathfrak{K}$ es un número grande, lo expresaremos en centenas $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}' \cdot 10^2$, con lo que

$$Q = \mathfrak{K} \sqrt{s_0} = \mathfrak{K}' \cdot 10^2 \times \sqrt{s'_0} \cdot 10^{-2} = \mathfrak{K}' \sqrt{s'_0}$$

simplificación que adoptaremos a lo largo de esta obra.

En las Tablas I y II, para $y_0 = 3{,}5$ m.

$$\mathfrak{K}\ (\text{Bazin}) = 1719{,}456$$
$$\mathfrak{K}\ (\text{G. K.}) = 1728{,}665$$

de donde, para $s_0 = 9 \cdot 10^{-4}$:

$$Q\,(\text{Bazin}) = 1719{,}456 \cdot \sqrt{9} \cdot 10^{-2} = 51{,}584\ \text{m}^3/\text{sg}.$$
$$Q\,(\text{G. K.}) = 1728{,}665 \cdot \sqrt{9} \cdot 10^{-2} = 51{,}860\ \text{m}^3/\text{sg}.$$

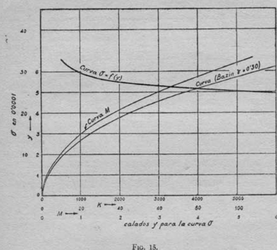


FIG. 15.

EJERCICIO:

Determinar Q para $y_0 = 2{,}5$ m. e $y_0 = 4{,}8$ m. con pendientes respectivas de 2 y 6 $^{00}/_{00}$.

Cuestión 3.ª En el canal dado, determinar la pendiente necesaria para que circule un caudal $Q = 200$ m³/sg., con un calado de 6 m.

a) Empleando el coeficiente de Bazin, el coeficiente de gasto para $y_0 = 6$ m. es $\mathfrak{K} = 5592{,}581$; por tanto, la pendiente precisa será:

$$s_0 = Q^2 / \mathfrak{K}^2 = 200^2 / 5592{,}581^2 = 12{,}8\ ^{00}/_{00}$$

b) Empleando el coeficiente de G. K. correspondiente, en una primera aproximación, a un valor de la pendiente de 0,001.

$$\mathfrak{K} = 5\,658{,}792$$

de donde

$$s_0 = Q^2/\mathfrak{K}^2 = 200^2/5658{,}792^2 = 12{,}5\ ^{00}/_{00}$$

empleando ahora el valor de $\mathfrak{K}$ correspondiente a esta pendiente, podría obtenerse un valor más aproximado.

EJERCICIO:

Determinar las pendientes precisas para que circulen por el canal caudales de 120 y 180 m³/seg., con calados respectivos de $y_0 = 5{,}5$ m. e $y_0 = 3{,}7$ m.

Cuestión 4.ª *a*) Determinar el calado necesario para que circulen por el canal 73 m³/seg., siendo la pendiente de 10 $^{00}/_{00}$. Empléese el coeficiente de G. K.

$$\mathfrak{K} = \frac{Q}{\sqrt{s_0}} = \frac{73}{\sqrt{10}} 10^2 = 2307\,;\ y_0 = 4{,}0 \text{ m}.$$

b) Suponiendo en la Cuestión 2.ª que un canal con

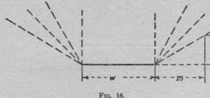


FIG. 16.

$y_0 = 3{,}5$ m. y $s_0 = 9\ ^{00}/_{00}$ tiene un gasto de 51,57 m³/seg., determinar el calado preciso para el mismo caudal, con una pendiente $s_0 = 5\ ^{00}/_{00}$. Empléese el coeficiente de Bazin.

El coeficiente de gasto preciso será:

$$\mathfrak{K} = Q/\sqrt{s_0} = 51{,}5/\sqrt{5}\,.\,10^{-2} = 2305\,;\ y_0 = 4{,}0 \text{ m}.$$

EJERCICIO:

Determinar el calado preciso para un caudal de 350 m³ por segundo con pendientes de 12 y 4 $^{00}/_{00}$.

8. Pérdidas por rozamientos.—Refiriendo el movimiento a una línea horizontal 0-0 (fig. 17), y tomando el eje X paralelo a la solera y su dirección positiva la de la corriente, las alturas de la línea de energía (energía por unidad de peso del líquido) en las secciones 1 y 2 son, respectivamente:

$$e_1 = h_1 + \frac{v_1^2}{2g} \quad \text{y} \quad e_2 = h_2 + \frac{v_2^2}{2g} \qquad [5]$$

La pérdida de altura de la línea en el trayecto dx es igual al trabajo desarrollado por unidad de peso del líquido para

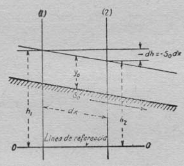


Fig. 17.—Régimen uniforme referido a una horizontal.

vencer las resistencias hidráulicas en dicho trayecto. Designando la pérdida de altura por e_r obtenemos:

$$e_1 - e_2 = -de = de_r$$

o

$$-de/dx = de_r/dx \qquad [6]$$

En el movimiento uniforme, como las velocidades permanecen constantes, se tiene:

$$de = e_2 - e_1 = h_2 - h_1 = -dh = -s_0 dx$$

lo que expresa que el trabajo de las fuerzas de gravedad se invierte íntegro en vencer las resistencias.

Sustituyendo (Ec. [4]) $s_0 = Q^2/\mathfrak{K}^2$ se obtiene, teniendo en cuenta [6]:

$$\left.\begin{aligned} de/dx &= -s_0 = -Q^2/\mathfrak{K}^2 \\ de_r/dx &= Q^2/\mathfrak{K}^2 \end{aligned}\right\} \qquad [7]$$

El cociente $Q^2/\mathfrak{K}^2$ mide la energía perdida en resistencias hidráulicas. En el sistema *M. K. S.* (*), $Q^2/\mathfrak{K}^2$ representa *el trabajo en kilográmetros, disipado en resistencias hidráulicas, por cada kilogramo de líquido en su movimiento a lo largo de un trayecto de* 1 *m.*

Si un volumen V de líquido, de peso específico Δ, fluye en un trayecto x, el trabajo total empleado en vencer las resistencias en dicho trayecto será

$$W_r = \Delta \,.\, V \,.\, Q^2/\mathfrak{K}^2 \,.\, x \qquad [8]$$

La *potencia* N (trabajo por unidad de tiempo) consumida al fluir un caudal Q a lo largo de un trayecto x, será:

$$N = \Delta \cdot Q \cdot \frac{Q^2}{\mathfrak{K}^2} \cdot x = \Delta \cdot \frac{Q^3 x}{\mathfrak{K}^2} \text{ m} \cdot \text{Kg por segundo} \qquad [9]$$

o, en forma diferencial:

$$\frac{dN}{dx} = \Delta \cdot Q^3/\mathfrak{K}^2 \qquad [10]$$

que es la pérdida de potencia, por resistencias, del caudal Q por unidad de longitud. Para agua con $\Delta = 1000$ Kg. por m³, y expresando N en CV, se tiene:

$$dN/dx = 1000/75 \,.\, Q^3/\mathfrak{K}^2 = 40/3 \,.\, Q^3/\mathfrak{K}^2 \text{ CV} \qquad [10a]$$

o, teniendo en cuenta la Ec. [4]:

$$\frac{dN}{dx} = \frac{40}{3} \cdot Q \cdot \frac{Q^2}{\mathfrak{K}^2} = \frac{40}{3} \cdot Q \cdot s_0 \text{ CV} \qquad [10b]$$

(*) En el original se emplea el sistema pie-libra-segundo, que no juzgamos interesante para aquellos a quienes se destina la edición traducida. (*N. del T.*)

EJEMPLO 2.°

Refiriéndonos al canal (fig. 14) y a las curvas (fig. 15):

Cuestión 1.ª ¿Cuál es la potencia consumida en vencer las resistencias, por Km. de longitud, por un caudal de 4 m^3/seg. que fluye con los calados $y_0=1$ m.; $y_0=1{,}50$ m. e $y_0=2$ m., respectivamente?

Empléense, como primera aproximación, los coeficientes de G. K. correspondientes a $s_0=10\ ^{00}/_{00}$.

Para $y_0=1$ m., $\mathfrak{K}=147$,

En estos dos ejemplos s_0 es una incógnita de caso en caso.-

y la pérdida de potencia es:

$$N(\mathrm{CV}) = \frac{40}{3} \cdot \frac{4^3}{147^2} \cdot 1000 = 39{,}50\ \mathrm{CV}.$$

Para los otros dos casos:

$$y_0=1{,}50\ \mathrm{m.};\ \mathfrak{K}=313;\ N=\frac{40}{3} \cdot \frac{4^3}{313^2} \cdot 1000 = 8{,}65\ \mathrm{CV}.$$

$$y_2=2{,}00\ \mathrm{m.};\ \mathfrak{K}=549;\ N=\frac{40}{3} \cdot \frac{4^3}{549^2} \cdot 1000 = 2{,}84\ \mathrm{CV}.$$

Cuestión 2.ª Calcular la energía disipada en resistencias pasivas por 1 m. de longitud de canal en veinticuatro horas, en el caso de un caudal de 10 m^3/seg. que fluye con $y_0=1{,}50$ m. Empléese el coeficiente de G. K. para $s_0=10\ ^{00}/_{00}$.

$\mathfrak{K}=313{,}446$, y según la Ec. [8],

$$W_r=1000 \times 100 \times 3600 \times 24 \times (10/313{,}446)^2 \times 1 = 88 \times 10^4\ \mathrm{Kgm}.$$

Cuestión 3.ª Empleando los coeficientes de Bazin, determinar la pérdida *relativa* de energía por Kg. de agua sobre 1 m. de longitud con un caudal de 3 m^3/seg., que fluye, respectivamente, con los siguientes calados:

$$y_0=0{,}50\ \mathrm{m.};\quad y_0=1{,}00\ \mathrm{m.};\quad y_0=1{,}50\ \mathrm{m.}$$

Las $\mathfrak{K}$ respectivas son:

42, 149 y 316;

La pérdida relativa de energía se determina por la Ec. [7]:

$y_0=0{,}50$ m.; $de_r/dx=Q^2/\mathfrak{K}^2=(3/42)^2=0{,}0051$
$y_0=1{,}00$ m.; $de_r/dx=Q^2/\mathfrak{K}^2=(3/149)^2=0{,}000405$
$y_0=1{,}50$ m.; $de_r/dx=Q^2/\mathfrak{K}^2=(3/316)=0{,}00009$

9. EL CALADO NORMAL.—En cuestiones de régimen variado se toma frecuentemente un movimiento uniforme *de referencia*. Supongamos un caudal Q que fluye por un canal de dimensiones dadas y pendiente s_0. En la figura 18 se ilustran las innumerables formas en que puede fluir dicho caudal entre dos secciones, 1 y 2, definidas dichas formas por los calados y_1 e y_2. Entre todas las formas posibles del movimiento, la representada por una línea gruesa paralela a la solera corresponde a *movimiento uniforme*. Las características de tal movimiento, en contraposición con las demás formas posibles del mismo, son:

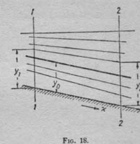


FIG. 18.

$$y=\text{const.},\ dy/dx=0 \qquad [11]$$

El calado del movimiento uniforme constituye un *parámetro* perfectamente determinado cuando se conocen el caudal y las características del canal. Llamaremos al calado del movimiento uniforme *calado normal*, y lo designaremos por y_0. En general se empleará el subíndice *o* para designar los elementos concernientes al movimiento uniforme. Para un canal y un caudal Q dados, el calado normal se determina por el método expuesto en el Ejemplo 1, cuestión 4. En efecto: dividiendo el caudal por la raíz cuadrada de la pendiente de la solera se obtiene el coeficiente de gasto correspondiente al calado normal

$$\mathfrak{K}_0=Q/\sqrt{s_0} \qquad [12]$$

después de lo cual, el correspondiente y_0 se toma en la respectiva curva $\mathfrak{K}$.

La curva de caudales normales $Q_0 = f(y_0)$.—En problemas frecuentes, en los que figuran diversos caudales en un canal dado, es útil a veces manejar un diagrama que relacione Q_0 e y_0. Esto se resuelve dibujando la que llamaremos *curva de caudales normales* $Q_0 = f(y_0)$, o *curva característica*.

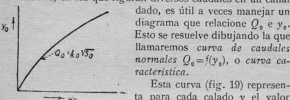


FIG. 19.—Curva característica.

Esta curva (fig. 19) representa para cada calado y el valor del caudal, en movimiento uniforme, correspondiente al respectivo calado $y_0 = y$. Como para cada calado y_0 el caudal es

$$Q_0 = \mathfrak{K}_0\sqrt{s_0},$$

la curva de caudales normales es la curva de coeficientes de gasto $\mathfrak{K} = sC\sqrt{R}$ multiplicada por $\sqrt{s_0}$.

EJERCICIOS:

1.° Dibujar la curva $Q_0 = f(y_0)$ para el canal de la figura 14.

a) Para $s_0 = 4\ ^{00}/_{00}$ con coeficientes de Bazin.

b) Para $s_0 = 10\ ^{00}/_{00}$ con coeficientes de G. K.

2.° Dibujar la curva de caudales normales para la sección del Ejercicio general del Ejemplo 1.° Escoger a discreción una pendiente entre $s_0 = 1\ ^{00}/_{00}$ y $s_0 = 15\ ^{00}/_{00}$.

Ejercicio general.—Se propone que el lector escoja una sección de canal, que puede utilizar para diversos ejercicios. Puede tomarse una sección trapecial, de anchura en el fondo w entre 1 y 8 m. y pendientes de los cajeros m/n., entre 0,5/1 y 2,5/1 (fig. 16, pág. 21).

CAPITULO III

ECUACION DEL REGIMEN VARIADO

10. Relaciones geométricas entre las pendientes superficial y del fondo.—En el régimen variado la lámina libre no es paralela al fondo del canal. La relación entre la pendiente superficial, $s = \operatorname{sen} \alpha$, y la del fondo, $s_0 = \operatorname{sen} \alpha_0$, se desprende de la figura 20:

$$s = \operatorname{sen} \alpha = \frac{bd}{ba} = \frac{cd - cb}{ba} = \operatorname{sen} \alpha_0 - \frac{dy}{dx}$$

y de aquí

$$s = s_0 - \frac{dy}{dx} \qquad [13]$$

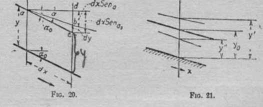


Fig. 20. Fig. 21.

11. Pérdidas por rozamiento en el movimiento variado.—Suponiendo las resistencias proporcionales al cuadrado de la velocidad, la pérdida de energía variará de una sección a otra, dependiendo en cada una del calado. Si en una sección cualquiera (fig. 21) el calado y' es mayor que el calado normal y_0, la velocidad v será menor que v_0 y las pérdidas de energía se reducirán en consonancia. Si, por el contrario, $y'' < y_0$, la velocidad será mayor que la del movimiento uniforme, y las pérdidas de energía sobrepasarán a las de éste.

Las pérdidas en el régimen variado con un cierto calado y pueden compararse con las que tendrían lugar con movimiento uniforme supuesto el mismo caudal, fluyendo con el mismo calado y la misma velocidad media. Evidentemente que es de esperar que las pérdidas con régimen variado sean un tanto diferentes de las del caso de movimiento uniforme. La diferencia puede estribar, en primer lugar, en una distribución de velocidades, en la sección tranversal, diferente de la del caso de movimiento uniforme. Entonces, y éste es probablemente el factor más importante, existe el efecto general que la divergencia o convergencia del flujo ejerce sobre el grado de turbulencia del líquido (1). Poco es lo que sabemos acerca del valor relativo del factor de rugosidad debido al rozamiento de las paredes del canal en régimen *lento* o *rápido*. Por otra parte, en la mayoría de los casos prácticos, el cambio de calado se realiza gradualmente, de forma que el estudio del movimiento con un determinado calado no puede ser muy diferente del que tendría lugar en condiciones similares, con movimiento uniforme. Por tanto, se hace la hipótesis básica de que las pérdidas en régimen variado, en una sección determinada caracterizada por el calado y (fig. 22), son las mismas que las que tendrían lugar con el mismo caudal fluyendo con el mismo calado $y = y_0$ con movimiento uniforme. Siendo la pérdida de energía $Q^2/\mathfrak{K}^2$, puede emplearse una expresión análoga para las pérdidas en el caso del movimiento variado. En efecto, las pérdidas de energía por Kg. de líquido sobre un trayecto dx son

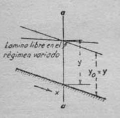


FIG. 22.—Pérdidas por resistencias pasivas en régimen variado con calado y, supuestas iguales a las pérdidas en movimiento uniforme con el mismo calado $y = y_0$.

$$de_r = \frac{Q^2}{\mathfrak{K}^2} dx; \quad \frac{de_r}{dx} = \frac{Q^2}{\mathfrak{K}^2} \qquad [14]$$

(1) REYNOLDS, O.: *Phil. Trans. Roy. Soc.*, 1883.

La relación de_r/dx, que depende de $\mathfrak{K}^2=f(y)$, es, por tanto, función del calado. Por lo que se refiere a

$$s_0=Q^2/\mathfrak{K}_0^2$$

que mide la pérdida relativa de energía en el caso del movimiento uniforme, la pérdida relativa en el movimiento variado será $Q^2/\mathfrak{K}^2>s_0$ o $Q^2/\mathfrak{K}^2<s_0$, según que $y<y_0$ o $y>y_0$.

12. Ecuación del régimen variado.—La ecuación diferencial del régimen variado se deduce de las Ec. [5] y [6]. Aplicando la última a las dos secciones 1 y 2 (fig. 23), distantes dx, se tiene:

$$-de=e_1-e_2=$$

$$=\left(h_1+\frac{v_1^2}{2g}\right)-\left(h_2+\frac{v_2^2}{2g}\right)=de_r$$

Fig. 23.

y expresada en términos diferenciales

$$\frac{de}{dx}=\frac{dh}{dx}+\frac{d}{dx}\left(\frac{v^2}{2g}\right)=-\frac{de_r}{dx} \qquad [15]$$

Por la figura 23 se tiene: $-dh/dx=\text{sen}\ \alpha=s$. Por otro lado (Ec. [14]),

$$de_r/dx=Q^2/\mathfrak{K}^2=v^2/C^2R \qquad [16]$$

Sustituyendo en la ecuación [15], se tiene

$$s=\frac{Q^2}{K^2}+\frac{d}{dx}\left(\frac{v^2}{2g}\right)=\frac{v^2}{c^2R}+\frac{d}{dx}\left(\frac{v^2}{2g}\right) \qquad [17]$$

que es la forma clásica en que se suele dar en los libros de Hidráulica la ecuación del régimen variado.

13. Limitaciones del campo de aplicación de la ecuación del régimen variado.—Es importante aclarar las condiciones específicas bajo las que es aplicable la Ec. [17]. En la Ec. [5] la expresión de la altura de la línea de energía $e=h+\frac{v^2}{2g}$ se aplica al movimiento en conjunto, signi-

ficando que $h + \frac{v^2}{2g}$ representa la energía contenida, en promedio, en cada kilogramo de líquido que fluye a través de la sección.

Tal sería el caso siempre y cuando la altura correspondiente a la energía potencial en todo punto de la sección fuera la misma. Pero dicha altura, en un cierto punto a (fig. 24) se mide (en la llamada ecuación de Bernoulli) por $z + \frac{p}{\Delta}$, donde z es la elevación del punto sobre la línea de referencia y $\frac{p}{\Delta}$ es la altura piezométrica, es decir, la altura de una columna de líquido equivalente a la presión p en el punto correspondiente.

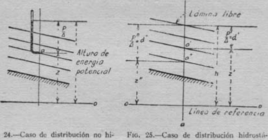


FIG. 24.—Caso de distribución no hidrostática de presiones.

FIG. 25.—Caso de distribución hidrostática de presiones en un líquido en movimiento.

Si el movimiento tuviera lugar de tal forma que la presión p en un punto cualquiera de una cierta sección (a' o a'', en la figura 25) fuera igual a la presión hidrostática correspondiente a la profundidad d del punto por bajo de la superficie libre, entonces, como se desprende de la figura 25, la suma $z + \frac{p}{\Delta}$ sería la misma para todos los puntos de la sección y siempre $z + \frac{p}{\Delta} = z + d = h$. En este caso se cumpliría la condición arriba impuesta y la altura de la línea de energía vendría expresada por la ecuación [5]. La condición de que en un líquido en movimiento la presión

en cada punto de una sección transversal sea igual a la presión correspondiente a la profundidad del mismo, equivale a decir que la distribución de presiones sobre una sección de un líquido en movimiento viene afectada solamente por la gravedad, siguiendo, por tanto, la ley hidrostática.

Los textos elementales de Hidrodinámica enseñan que la distribución de presiones en un líquido en movimiento obedecerá la ley hidrostática, y vendrá afectada solamente por

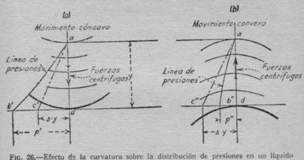


Fig. 26.—Efecto de la curvatura sobre la distribución de presiones en un líquido en movimiento.

la gravedad siempre y cuando el movimiento se produzca de tal forma que los filetes líquidos no tengan componente de la aceleración en el plano de la sección. El movimiento de tal clase, es decir, el régimen donde no existen componentes de la aceleración que perturben la distribución de presiones en un plano perpendicular a la dirección del mismo, se denomina *movimiento paralelo*. Los requisitos específicos del movimiento paralelo fueron definidos con toda claridad por Bélanger en 1828 en su celebrada publicación, considerada como piedra angular de la teoría del régimen variado (1).

Dichas condiciones eran:

1.ª Que las líneas de corriente no tengan curvatura notable.

(1) Véase nota bibliográfica en el Apéndice I.

2.ª Que las líneas de corriente no tengan divergencia notable.

En el movimiento curvilíneo (fig. 26), según que las líneas de corriente sean cóncavas o convexas, la fuerza centrífuga actuará a favor o en contra de la gravedad, resultando, por tanto, que en lugar de ser la ley de presiones la representada por el triángulo *acd*, la presión vendrá representada por la curva *ab*.

En el caso de movimiento divergente (fig. 27), cuando las líneas de corriente posean una inclinación notable con el plano de la sección transversal, la aceleración *oa* puede tener una componente *oa'*, apreciable, contenida en el plano de la sección cuyo efecto modificará la distribución hidrostática de las presiones.

Fig. 27.

Puede afirmarse que el efecto de divergencia es, en general, despreciable. Por otro lado, las desviaciones de la ley hidrostática originadas por la curvatura suelen ser considerables, de forma que tratándose de movimiento curvilíneo no son, en rigor, aplicables las ecuaciones [5] y [17].

En el artículo 6 se ha hecho la distinción entre *régimen gradualmente variado* y *fenómenos locales*. Ahora estamos en condiciones de especificar las razones mecánicas que fundamentan tal distinción.

Régimen gradualmente variado es un término introducido por Boussinesq, que califica el movimiento con más propiedad que el de régimen paralelo debido a Bélanger. Mientras que, en rigor, las condiciones de Bélanger son aplicables solamente al movimiento uniforme rectilíneo, en la práctica, no obstante, como se ha hecho constar anteriormente, el cambio de circunstancias del régimen puede tener lugar tan gradual y lentamente que pueda afirmarse que las líneas de corriente no poseen curvatura o divergencia *apreciables*. En otros términos: que la curvatura y divergencia son lo suficientemente pequeñas para poder despreciar los efectos de la componente de la aceleración en

el plano de la sección. En el movimiento gradualmente variado de tal clase puede, por tanto, suponerse que la distribución de presiones se atiene a la ley hidrostática; será válida la ecuación de la energía [5] y aplicable la ecuación del régimen variado [17].

En contraposición, en la mayoría de los fenómenos locales se tropieza con curvatura o divergencia fuertes de los filetes líquidos; no prevalece la ley hidrostática, no pudiendo aplicarse la Ec. [17].

Es de suma importancia tener siempre presente esta distinción, así como las premisas fundamentales.

14. Canales prismáticos.—Aparte de las limitaciones impuestas en el párrafo precedente, la Ec. [17]

$$S = \frac{Q^2}{\mathfrak{K}^2} + \frac{d}{dx}\left(\frac{v^2}{2g}\right)$$

es completamente general, y puede representar en el sentido más amplio el movimiento variado, incluso en el caso en que la forma del canal cambie gradualmente de una a otra sección (v. Art. 2). En el caso de un canal prismático (v. Art. 2) con un caudal Q dado, la velocidad y demás características del movimiento, en una determinada sección transversal, dependen del calado y. El problema contiene, entonces, dos variables: el calado y y la abscisa (distancia al eje) x. Entonces, cuando se conoce la ecuación de la superficie límite $y=f(x)$ se puede determinar completamente el movimiento: con el calado y se determina el valor de a, que a su vez define $v=Q/a$ y seguidamente los demás elementos del mismo.

En canales prismáticos, el término $\frac{d}{dx}\left(\frac{v^2}{2g}\right)$ que expresa la variación de la energía cinética en la Ec. [17] puede ponerse en la forma:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{v^2}{2g}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{Q^2}{2ga^2}\right) = -\frac{Q^2}{ga^3}\frac{da}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} \qquad [18]$$

En la fracción $\frac{da}{dy}$ el numerador da expresa el incremento de sección transversal debido al incremento de calado dy.

Despreciando infinitésimos de orden superior, este incremento de área (fig. 28) es $da = bdy$, donde b es el ancho de la superficie libre del líquido en el perfil. Se tiene, por tanto:

$$da/dy = b \qquad [19]$$

y por consiguiente, el incremento de energía cinética

Fig. 28

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{v^2}{2g}\right) = -\frac{Q^2}{g}\cdot\frac{b}{a^3}\cdot\frac{dy}{dx} \qquad [20]$$

Sustituyendo en la Ec. [17] $\frac{d}{dx}\left(\frac{v^2}{2g}\right)$ por la Ec. [20]; expresando s por la Ec. [13], y teniendo en cuenta la Ec. [12], en la que hacemos $Q^2/\mathfrak{K}^2 = s_0\,\mathfrak{K}_0{}^2/\mathfrak{K}^2$, donde $\mathfrak{K}_0$ es coeficiente de gasto correspondiente al calado normal, se tiene:

$$s = s_0 - \frac{dy}{dx} = \frac{Q^2}{\mathfrak{K}^2} + \frac{d}{dx}\left(\frac{v^2}{2g}\right) = s_0\frac{\mathfrak{K}_0{}^2}{\mathfrak{K}^2} - \frac{Q^2}{g}\cdot\frac{b}{a^3}\cdot\frac{dy}{dx}$$

de donde:

$$\frac{dy}{dx} = s_0\,\frac{1-(\mathfrak{K}_0/\mathfrak{K})^2}{1-\frac{Q^2}{g}\,\frac{b}{a^3}} \qquad [21]$$

que es la ecuación diferencial del movimiento gradualmente variado en *canales prismáticos*.

CAPITULO IV

FORMAS GENERALES DEL MOVIMIENTO DE LOS FLUIDOS

15. La energía específica del movimiento.—Cuando un caudal Q fluye, con movimiento uniforme, con el calado normal y_0, el trabajo de gravedad $s_0 dx$ se aplica totalmente a vencer las resistencias $\frac{Q_0^2}{\mathfrak{K}_0^2}\,dx$. Por tanto, las circunstancias del movimiento (fig. 29) en la sección 2 son las mismas que las de la sección 1.

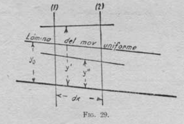


Fig. 29.

Si, por el contrario, el líquido fluye con un calado $y' > y_0$, las pérdidas de energía $\frac{Q^2}{\mathfrak{K}^2(y')}\,dx$ consumida en vencer las resistencias de un trayecto dx serán menores que el trabajo de gravedad sobre el mismo trayecto $s_0 dx = \frac{Q^2}{\mathfrak{K}_0^2}\,dx$. Por consiguiente, en su movimiento entre los perfiles 1 y 2 se producirá un incremento de energía, que por unidad de peso será:

$$s_0 dx - \frac{Q^2}{\mathfrak{K}^2(y')}\,dx = \left(\frac{Q^2}{\mathfrak{K}_0^2} - \frac{Q^2}{\mathfrak{K}^2(y')}\right)dx = s_0\left(1 - \left[\frac{\mathfrak{K}_0}{\mathfrak{K}(y')}\right]^2\right)dx \quad [22]$$

En el caso de que $y'' < y_0$, las pérdidas de energía $\frac{Q^2}{\mathfrak{K}^2(y'')} dx$ serán superiores al trabajo de gravedad. Entonces, en el movimiento del líquido en el trayecto dx sufrirá una merma la energía almacenada en la sección 1. Este decrecimiento de energía se mide por la misma expresión de la Ec. [22], salvo que, como $\mathfrak{K}(y'') < \mathfrak{K}_0$, el signo de $1 - \mathfrak{K}_0 / \mathfrak{K}(y'')^2$ será negativo. Vemos que depende de que $y > y_0$ o $y < y_0$ el que la energía del líquido aumente o disminuya de una sección a otra.

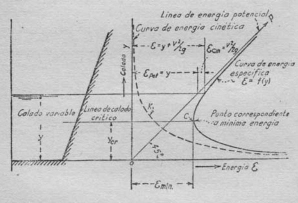


FIG. 30.—El diagrama de la energía específica $\varepsilon = y + \frac{Q^2}{2ga^2} = f(y)$.

Se tiene una visión clara del mecanismo del fenómeno introduciendo el concepto de *energía específica del movimiento*.

Supongamos un caudal Q que fluye por un canal (figura 30) con calado variable y. Refiriendo el movimiento a un plano de comparación que pasa por la solera de la sección, la altura media de la línea del líquido en movimiento es:

$$\varepsilon = y + \frac{v^2}{2g} = y + \frac{Q^2}{2ga^2} \qquad [23]$$

Como ε es función, en definitiva, del calado, puede dibujarse la curva $\varepsilon = f(y)$; a ε lo denominaremos *energía específica del movimiento*, y a la curva $\varepsilon = f(y)$, *diagrama de energía específica*. Para aclarar ideas es preciso no confundir la energía específica $\varepsilon = y + \dfrac{v^2}{2g}$, definida por la Ec. [23], de la energía $e = h + \dfrac{v^2}{2g}$, definida en la Ec. [5]. En la Ec. [5], la energía se refiere a una línea de comparación fija. Representa la variación de la energía del movimiento flúido total, sobre un cierto trayecto. La energía específica (Ec. [23]) se refiere a la línea de solera, que cambia de una sección a otra. La variación de ε refleja la variación de la energía en una sección transversal considerada como función del calado. El régimen uniforme se caracteriza por ser ε constante, o en otros términos: $\partial\varepsilon = \partial x$. En régimen variado, el exceso o déficit del trabajo de gravedad sobre las resistencias pasivas, en un trayecto dx, se suma o resta a la energía específica. Según esto, y de acuerdo con la Ec. [22], se tiene:

$$\partial\varepsilon/\partial x = s_0\left(1 - [\mathfrak{K}_0/\mathfrak{K}]^2\right) \qquad [24]$$

Evidentemente, cuando

$y > y_0$; $\mathfrak{K} > \mathfrak{K}_0$; $\partial\varepsilon/\partial x > 0$; ε crece en la dirección del movimiento,

mientras cuando [25]

$y < y_0$; $\mathfrak{K} < \mathfrak{K}_0$; $\partial\varepsilon/\partial x < 0$; ε decrece en la dirección del movimiento.

Para un caudal y canal dados, la curva de energía específica $\varepsilon = y + \dfrac{Q^2}{2ga^2}$ puede dibujarse como $\varepsilon = f(y)$. El primer término, la energía potencial, se representa por una recta op (fig. 30), inclinada 45° con relación al eje x. El segundo término $\dfrac{v^2}{2g}$, la energía cinética, es una curva K asintótica a los ejes. La curva $\varepsilon = f(y)$ se obtiene sumando las abscisas correspondientes de ambas, resultando asintótica a op y a ox. Esta curva ofrece un mínimo c correspondiente a un cierto calado, que designaremos por y_{cr}.

16. Calado crítico.—Es el calado particular para el que la energía específica es mínima, o con otras palabras: el calado bajo el cual fluye un cierto caudal Q en un canal dado, con un contenido mínimo de energía específica. Lo designaremos, en adelante, por y_{cr}.

Es de suma importancia tener un concepto claro de ello. Un cierto caudal Q puede fluir por un canal dado de innumerables modos, caracterizado cada uno por un calado y. A cada calado corresponde un valor definido de la energía específica ε. En general, ε varía con el calado, pero el contenido de energía por unidad de peso del líquido no puede bajar de un valor ε_{min}, o dicho de otra forma: ε_{min} es el mínimo contenido posible de energía específica con el que un caudal Q puede fluir por un canal dado. Por tanto, el calado crítico y_{cr} y el mínimo posible de energía ε_{min} constituyen parámetros definidos, inherentes al régimen.

Para determinar el valor de y_{cr}, hagamos

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = 1 - \frac{Q^2}{g a^3} \cdot \frac{\partial a}{\partial y} = 0$$

y como

$$\partial a / \partial y = b \text{ (ver Ec. [19])}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = 1 - \frac{Q^2}{g} \cdot \frac{b}{a^3} = 0 \qquad [26]$$

que corresponde a un calado determinado por la ecuación

$$Q^2/g \cdot b/a^3 = 1 \qquad [27]$$

En otros términos: el calado crítico para un caudal dado Q es el calado y_{cr}, para el que a^3/b es igual a

$$(a^3/b)_{cr} = Q^2/g$$
$$\left(a\sqrt{a/b}\right)_{cr} = Q/\sqrt{g} \qquad [28]$$

La función $\mathfrak{M}$.—Para una sección dada, el valor de a^3/b es solamente función del calado. Podemos designar por

$$a\sqrt{a/b} = \mathfrak{M}\,; \quad a^3/b = \mathfrak{M}^2 \qquad [29]$$

y llamaremos a $\mathfrak{M}(y) = a\sqrt{a/b}$ la función $\mathfrak{M}$. Representada

gráficamente, para una sección transversal dada (fig. 31), la función $\mathfrak{M}$ permite determinar el calado crítico para cualquier caudal que circule por el canal. En efecto: para un

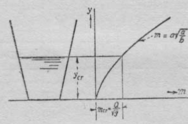


FIG. 31.—Determinación del calado crítico mediante la curva $\mathfrak{M} = a\sqrt{\frac{a}{b}}$

caudal dado Q, se determina (Ec. [28]) el valor crítico de

$$\mathfrak{M}_{cr} = Q/\sqrt{g} \qquad [30]$$

y a continuación, mediante la curva $\mathfrak{M}$, se obtiene el valor del calado crítico y_{cr}.

Sección rectangular. — En el caso de la sección rectangular (figura 32), siendo el caudal por unidad de ancho del canal

$$q = Q/b \qquad [31]$$



FIG. 32.

la función $\mathfrak{M}(y)$ es:

$$\mathfrak{M} = \sqrt{a^3/b} = \sqrt{b^3 y^3/b} = b\sqrt{y^3} \qquad [32]$$

El calado crítico se obtiene de la relación

$$Q/\sqrt{g} = bq/\sqrt{g} = \mathfrak{M}_{cr} = b\sqrt{y^3_{cr}}$$

de donde

$$\left.\begin{aligned} y_{cr} &= \sqrt[3]{q^2/g} \\ q^2 &= g y^3_{cr} \end{aligned}\right\} \qquad [33]$$

EJEMPLO 3.°

Cuestión 1.ª Representar la curva $\mathfrak{M} = a\sqrt{a/b}$ para la sección transversal de canal de la figura 14.

En la Tabla III se resumen los cálculos, con los datos sacados de la Tabla I.

TABLA III

y	a	b	a/b	$\mathfrak{M} = a\sqrt{a/b}$
0,5	1,25	3,00	0,416	0,806
1,0	3,00	4,00	0,750	2,598
1,5	5,25	5,00	1,050	5,381
2,0	8,00	6,00	1,333	9,232
2,5	11,25	7,00	1,607	14,253
3,0	15,00	8,00	1,875	20,535
3,5	19,25	9,00	2,139	28,143
4,0	24,00	10,00	2,400	37,176
4,5	29,25	11,00	2,659	47,677
5,0	35,00	12,00	2,916	59,745
5,5	41,25	13,00	3,173	73,466
6,0	48,00	14,00	3,428	88,848

En la figura 15 se ha dibujado la curva.

Cuestión 2.ª Determinar los calados críticos para $Q = 8$, 29 y 88 m³/seg. respectivamente.

Según la Ec. [30], haciendo $\sqrt{g} = 3{,}132$, se tiene:

Para $Q = 8$ m³/seg.; $\mathfrak{M}_{cr} = 8/3{,}132 = 2{,}554$; $y_{cr} \simeq 1{,}0$ m.

Para $Q = 29$ m³/seg.; $\mathfrak{M}_{cr} = 29/3{,}132 = 9{,}259$; $y_{cr} \simeq 2{,}0$ m.

Para $Q = 88$ m³/seg.; $\mathfrak{M}_{cr} = 88/3{,}132 = 28{,}097$; $y_{cr} \simeq 3{,}5$ m.

Cuestión 3.ª En un canal rectangular de 3 m. de ancho determinar el calado crítico correspondiente a caudales de 4, 5 y 6 m³/seg.

Los caudales respectivos por unidad de ancho son: $q = 4/3$, $5/3$ y 2 m³/seg. Por la Ec. [33] se tiene:

$$q = 4/3 \text{ m}^3/\text{seg.}; \quad y_{cr} = \sqrt[3]{(4/3)^2/9{,}81} = 0{,}566 \text{ m.}$$

$$q = 5/3 \text{ m}^3/\text{seg.}; \quad y_{cr} = \sqrt[3]{(5/3)^2 9{,}81} = 0{,}656 \text{ m.}$$

$$q = 2 \text{ m}^3/\text{seg.}; \quad y_{cr} = \sqrt[3]{2^2/9{,}81} = 0{,}741 \text{ m.}$$

EJERCICIOS:

1.° Representar la curva $M = a\sqrt{a/b}$ para la sección de canal utilizada en el ejercicio general del artículo 7.°

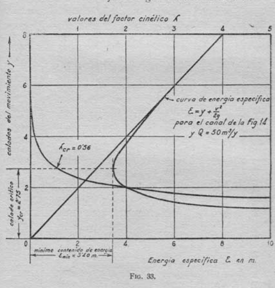


FIG. 33.

2.° Determinar el calado crítico para una serie de caudales y representar la curva de calados críticos $y_{cr} = f(Q)$.

3.° Trazar la curva $y_{cr} = f(q)$ para un canal rectangular.

EJEMPLO 4.°

Dibujar la curva de energía específica para el canal de la figura 14 con un caudal $Q = 50$ m³/seg.

En la Tabla IV se desarrollan los cálculos y en la figura 33 se representa la curva.

TABLA IV

y	a	$v = \frac{50}{a}$	$\frac{v^2}{2g}$	$\varepsilon = y + \frac{v^2}{2g}$	λ
0,50	1,25	40,000	81,600	82,100	326,400
0,75	2,06	24,272	30,046	30,796	80,122
1,00	3,00	16,666	14,166	15,166	28,332
1,25	4,06	12,315	7,735	8,985	12,376
1,50	5,25	9,524	4,626	6,126	6,168
1,75	6,56	7,622	2,963	4,713	3,386
2,00	8,00	6,250	1,992	3,992	1,992
2,25	9,56	5,230	1,395	3,645	1,240
2,50	11,25	4,444	1,007	3,507	0,806
2,75	13,06	3,828	0,747	3,497	0,543
3,00	15,00	3,333	0,567	3,567	0,378
3,25	17,06	2,931	0,438	3,688	0,269
3,50	19,25	2,597	0,344	3,844	0,196
3,75	21,56	2,319	0,274	4,024	0,146
4,00	24,00	2,083	0,221	4,221	0,110
4,25	26,56	1,883	0,181	4,431	0,085
4,50	29,25	1,709	0,149	4,649	0,066
4,75	32,06	1,560	0,124	4,874	0,052
5,00	35,00	1,429	0,104	5,104	0,042
5,25	38,06	1,314	0,088	5,338	0,033
5,50	41,25	1,212	0,075	5,575	0,027
5,75	44,56	1,122	0,064	5,814	0,022
6,00	48,00	1,042	0,055	6,055	0,018
7,00	63,00	0,749	0,032	7,032	0,009
8,00	80,00	0,625	0,020	8,020	0,005
9,00	99,00	0,505	0,013	9,013	0,003
10,00	120,00	0,417	0,009	10,009	0,002

17. INTERPRETACIÓN FÍSICA DE LOS FENÓMENOS.—El concepto de energía específica proporciona una explicación clara y simple de muchos fenómenos de régimen variado.

El resalto hidráulico.—Como se ilustra en la figura 34, el resalto es una transición brusca del régimen, con salto en la curva de energía de la rama inferior a la superior. ε_1 y ε_2 son las energías específicas correspondientes a los calados d_1 y d_2 antes y después del resalto. $\varepsilon_f = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ es la pérdida de energía debida al resalto, pérdida que en ciertas circunstancias puede ser considerable.

Régimen ante un escalón. Depresión hidráulica.—La figura 35 representa este caso. Para simplificar la cuestión supondremos horizontal la solera del canal, de forma que

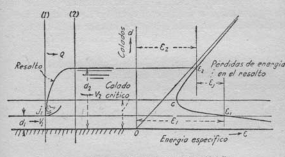


Fig. 34.—Interpretación física del resalto hidráulico.

sea nulo el efecto acelerador de la pendiente y el de vencer las resistencias pasivas. En tales condiciones el movimiento

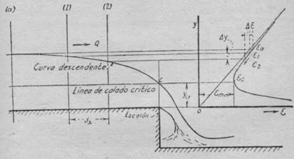


Fig. 35.—Régimen ante un escalón.

se produce exclusivamente a expensas de la energía acumulada en el líquido. En consecuencia, el paso de la sección (1) a la (2) corresponde a un descenso sobre la rama superior de la curva de energía, en el cual la pérdida de energía $-\Delta\varepsilon$

viene acompañada del correspondiente descenso $-\Delta y$ del calado. La superficie del líquido en movimiento, en su natural tendencia a descender, no puede trasponer el calado crítico, que corresponde al mínimo contenido posible de energía. Cualquier descenso por debajo de y_{cr} significaría el paso del movimiento a la rama inferior de la curva, lo que sólo puede tener lugar por adición de energía exterior.

El calado crítico corresponde, por tanto, al nivel inferior que puede alcanzar la superficie libre del líquido en el proceso natural de disipación de la energía. Por tanto, el calado crítico es el calado inferior que se establece de una manera natural, automáticamente, en el extremo del canal, sobre un escalón.

En la figura 9 se representa el caso de la depresión hidráulica; el calado y_c es el crítico. Lo mismo sucede en el caso de la figura 2 *c*, en que el canal desagua en un depó-

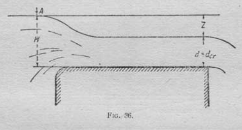


Fig. 36.

sito *B*. Supongamos que el nivel en el depósito *A* permanece constante, mientras que desciende en *B*. Dentro de ciertos límites el calado y_2 seguirá en su descenso al del nivel del depósito B. Pero al alcanzarse el límite natural $y_2 = y_{cr}$ el calado en el extremo del canal permanecerá constante e igual al crítico por más que descienda el nivel en *B*.

El enlace entre la superficie del líquido fluyente del canal y el nivel del depósito *B* tiene lugar en tal caso mediante una curva de depresión hidráulica.

Vertedero en pared gruesa.—La figura 36 representa esquemáticamente un vertedero en pared gruesa. En el caso de desagüe libre el calado *d* que se establece en el extremo

del vertedero será el crítico; por tanto, $d^3 = q^2/g$, siendo q el caudal por unidad de ancho. Si H es la altura sobre el vertedero, antes de éste, corregida teniendo en cuenta la velocidad de llegada, el caudal es $q = m\sqrt{2g}\,H^{3/2}$, donde m es el coeficiente de gasto del vertedero. Eliminando q se tiene:

$$d^3 = 2m^2H^3$$

de donde

$$d/H = d' = \sqrt[3]{2m^2}; \qquad m = \sqrt{{}^1/_2 (d/H)^3} \qquad [34]$$

Se ve que para una altura H dada, el calado d que se establece sobre el vertedero depende del valor de m. Cuanto menor valor tiene, es decir, cuanto mayores son las resistencias, menor es el calado relativo $d' = d/H$. Esto está de acuerdo con la experiencia, pero en contradicción con la teoría del máximo gasto que se suele exponer tradicionalmente en los libros de texto. Conforme al principio del máximo gasto, $d' = d/H$ vale siempre dos tercios. Esto sucedería únicamente si el régimen fuera ideal, sin rozamientos. En todos los casos prácticos $d' = d/H$ es menor que dos tercios. Para aclarar esto determinemos la velocidad v en el extremo del vertedero, en la sección donde el calado es d. Introduciendo un coeficiente de velocidad φ y teniendo en cuenta las resistencias, tenemos:

$$v = \varphi\sqrt{2g(H-d)} = \varphi\sqrt{2gH}\sqrt{1-\frac{d}{H}} = \varphi\sqrt{2gH}\cdot\sqrt{1-d'}$$

y, por tanto, el caudal

$$q = v\cdot d = \varphi\sqrt{2g}\,H^{3/2}\cdot d'\sqrt{1-d'}$$

y el coeficiente de gasto

$$m = \varphi d'\sqrt{1-d'} \qquad [34a]$$

Comparando con la Ec. [34] se tiene:

$$m = \varphi d'\sqrt{1-d'} = \sqrt{{}^1/_2 (d')^3} \qquad [34b]$$

de donde

$$\left.\begin{aligned} \varphi^2 &= \frac{d'}{2(1-d')} \\ d' &= \frac{2\varphi^2}{1+2\varphi^2} \end{aligned}\right\} \qquad [34c]$$

Evidentemente, si $\varphi^2=1$, d' (Ec. [34c])$={}^2/_3$ y el coeficiente de gasto (Ec. [34]) valdrá $m=0,385$. Para cualquier valor de m se obtienen por las Ecs. 34a-34c los valores correspondientes del calado reducido y del coeficiente de velocidad φ. He aquí algunos valores:

m	φ	d'
0,385	1,0	$^2/_3$
0,350	0,915	0,625
0,320	0,85	0,59

Régimen curvilíneo.—Experimentalmente se ha comprobado que en un vertedero sobre pared gruesa el calado crítico $d_{cr}=\sqrt[3]{q^2/g}$ se alcanza una cierta distancia antes del borde del vertedero (sección C, fig. 37) y que el calado d'_{cr} sobre

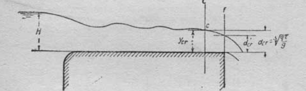


FIG. 37.—Régimen sobre un vertedero en pared gruesa.

el borde es algo menor. La explicación estriba en el hecho de que el calado crítico $d_{cr}=\sqrt[3]{q^2/g}$ se ha determinado en el art. 16 bajo hipótesis de movimiento paralelo. En otros términos: $d_{cr}=\sqrt[3]{q^2/g}$ corresponde a un régimen con un contenido mínimo de energía en movimiento paralelo y sólo para este movimiento.

En el caso de régimen curvilinear el mínimo contenido posible de energía correspondiente a un caudal q difiere de $\varepsilon_{min}=1,5\sqrt[3]{q^2/g}$, correspondiente al régimen paralelo. Es mayor en el movimiento cóncavo (fig. 26a) y menor en el convexo (fig. 26b).

Por tanto, el calado crítico, considerado como aquel en que el contenido de energía del movimiento es mínimo, es menor que $\sqrt[3]{q^2/g}$ en corrientes convexas y mayor en cóncavas. Los filetes líquidos incrementan gradualmente su curvatura convexa entre los perfiles C y F de la figura 37; por tanto, el calado crítico disminuye desde $d_{cr}=\sqrt[3]{q^2/g}$ en C a un valor menor d'_{cr} sobre el borde.

Aforo por calado crítico.—En vista de que el calado crítico es un parámetro definido del movimiento, independiente de la rugosidad de las paredes y de otras circunstancias incontrolables, se ha pensado en utilizar el régimen en estado crítico para determinar el caudal de un canal.

En efecto, suponiendo que mediante un artificio cualquiera se provoca el régimen crítico en una sección dada, la determinación del caudal se reduciría a medir el calado d correspondiente.

Si la sección transversal del canal fuera rectangular, el caudal correspondiente al calado d sería:

$$Q=b\sqrt{gd^3}=bd\sqrt{gd}$$

y en el caso más general

$$Q=\sqrt{g}\cdot\mathfrak{M}_{cr}=a\sqrt{g\frac{a}{b}}$$

Se han realizado diversos intentos de llevar a la práctica esta idea.

El calado crítico se provoca corrientemente, bien por un estrechamiento de la sección del canal, seguido del ensanchamiento correspondiente, bien mediante un escalón en la solera. En ambos casos se presenta el fenómeno de la depresión hidráulica.

En el cálculo de los aforadores de calado crítico es particularmente interesante no olvidar que las relaciones $q=bd\sqrt{gd}$ ó $Q=a\sqrt{ga/b}$ son de aplicación estrictamente limitada al régimen paralelo. En otros términos: sólo puede lograrse el aforo si el régimen, en la sección donde se mide el calado crítico, es prácticamente paralelo.

Ecuación del régimen gradualmente variado.—La noción de energía específica y el diagrama de energía (fig. 30)

pueden aplicarse directamente para establecer la ecuación diferencial general del régimen variado. En efecto: refiriéndonos a la figura 35, el incremento de energía entre las secciones 1 y 2, suponiendo que la distancia dx es pequeña, es $-\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}dx = -d\varepsilon$, viniendo $\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}$ determinado por la Ec. [24]. Este incremento de energía específica es evidentemente igual a la variación de energía específica sobre el diagrama, correspondiente a un incremento dy del calado, es decir:

$$-d\varepsilon = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}dy,$$

donde $\partial\varepsilon/\partial y$ se determina por la Ec. [26]. Combinando, se tiene:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}dx = \frac{\partial \varepsilon}{\partial y}dy,$$

de donde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial\varepsilon/\partial x}{\partial\varepsilon/\partial y} = s_0 \frac{1-(\mathfrak{K}_0/\mathfrak{K})^2}{1-\frac{Q^2}{g}\frac{b}{a^3}}$$

que es la Ec. [21].

Puede mencionarse, llegando a este punto, que anteriormente a emplearse el concepto de energía específica, el cual, a pesar de su simplicidad, no fué descubierto hasta hace relativamente poco (v. Prólogo), no se tuvo una visión clara de la esencia física de los fenómenos que se ocasionan en el régimen variado. La presencia del resalto, por ejemplo, se explicaba por consideraciones puramente analíticas. En efecto: el denominador de la Ec. [21] para el valor particular de $\frac{Q^2 b}{ga^3}=1$, es decir, para el calado crítico, se anula; por tanto, $dy/dx=\infty$. Esto indica una solución de continuidad de la lámina libre, que toma una inclinación perpendicular al eje X. Esta discontinuidad se supuso confirmada experimentalmente con la formación del resalto.

18. Régimen crítico.—Cuando un líquido discurre por un canal dado con el calado crítico ($y=y_{cr}$) se dice que fluye

en *régimen crítico* o en *estado crítico*. Para un caudal dado el calado crítico, determinado en el Ap. 16, indica el calado particular, con el que el caudal Q puede fluir en estado crítico.

Caudal crítico Q_{cr}.—Invirtiendo el razonamiento, se puede decir que para cada calado y de un canal dado existe un determinado caudal Q_{cr} que fluye en régimen crítico. Llamaremos a Q_{cr} caudal crítico. Viene determinado por la Ec. [30], siendo igual a

$$Q_{cr} = \sqrt{g}\mathfrak{M}(y) = \sqrt{g}a\sqrt{a/b} \qquad [35]$$

Para una sección dada puede dibujarse la curva $Q_{cr} = f(y)$, que es, evidentemente, la curva $\mathfrak{M}(y)$ multiplicada por el factor $\sqrt{g}$.

Velocidad crítica v_{cr}.—La velocidad correspondiente al régimen crítico se llama velocidad crítica, y la designaremos por v_{cr}. Por la Ec. [35] se tiene:

$$v_{cr} = Q_{cr}/a = \sqrt{g}\sqrt{a/b} \qquad [36]$$

El cociente a/b tiene una interpretación física sencilla: es (fig. 38) el calado de la sección rectangular equivalente del mismo ancho que la dada. Designarémoslo:

$$a/b = \delta \qquad [37]$$

y lo llamaremos *calado medio* de la sección.

La velocidad crítica es entonces:

$$v_c = \sqrt{g\delta} = \sqrt{2g\frac{\delta}{2}} \qquad [38]$$

es decir, la velocidad debida a una altura igual a la mitad del calado medio δ. Comparando el calado medio con el radio hidráulico $R = a/p$ se tiene:

$$\delta/R = a/b \, . \, p/a = p/b \qquad [39]$$

Sección rectangular.—Para una sección rectangular (figura 32) se tiene por la Ec. [35]:

$$q_{cr} = \sqrt{g}\,\sqrt{y^3}$$
$$v_{cr} = \sqrt{g}\,\sqrt{y} \qquad [40]$$

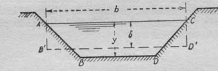


FIG. 38.—El calado medio $\delta = a/b$.

En este caso se tiene, evidentemente,

$$\delta = a/b = y \qquad [41]$$

19. PENDIENTE CRÍTICA (fig. 39).—La pendiente de la solera que para un calado dado y provoca el régimen crítico con movimiento uniforme, se llama *pendiente crítica*, que designaremos en adelante por la letra σ para diferen-

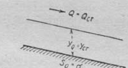


FIG. 39.—La pendiente crítica σ.

ciarla de s y s_0. La pendiente crítica σ es función del calado. Para determinarla se tiene, por definición: $Q^2 = \sigma \mathfrak{K}^2$ y a la vez $Q^2 = g\mathfrak{M}^2$, de donde

$$\sigma \mathfrak{K}^2 = g\mathfrak{M}^2$$
$$\sigma = g\,\frac{\mathfrak{M}^2}{\mathfrak{K}^2} \qquad [42]$$

En esta ecuación $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{K}$ son valores particulares de la función $\mathfrak{M} = a\sqrt{a/b}$ y del módulo $\mathfrak{K} = aC\sqrt{R}$ para el calado

dado y. Para una sección transversal dada puede dibujarse la curva $\sigma=f(y)$ como se hace en la figura 15 para el canal de la figura 14.

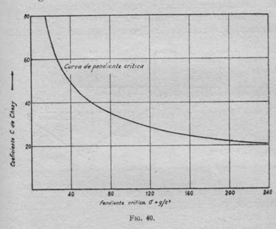


FIG. 40.

Puede obtenerse otra expresión de σ sustituyendo en la Ec. [42] los valores de $\mathfrak{M}^2=a^3/b$ y $\mathfrak{K}^2=a^2C^2R=a^3C^2/p$, con lo cual

$$\sigma = g\frac{a^3}{b}\cdot\frac{p}{a^3\,C^2}=\frac{g}{C^2}\cdot\frac{p}{b}, \qquad [43]$$

lo que puede ponerse en la forma

$$\sigma=\sigma'\cdot p/b,$$

donde

$$\sigma'=g/C^2. \qquad [43a]$$

Puede trazarse la curva $\sigma'=g/C^2$ como función de C, para tener una idea de valores concretos (fig. 40). En el caso de una sección en que el ancho es grande comparado con el calado y, por tanto, p/b, en la Ec. [43], no difiere mucho de la unidad (lo cual es el caso corriente en los cursos naturales de agua), la curva $\sigma'=g/C^2$ da directamente los valo-

res de la pendiente crítica. En los restantes casos debe multiplicarse por p/b, factor siempre >1.

En la figura 41 se dan algunos ejemplos de secciones de canales, para apreciar el valor del coeficiente p/b.

Pendiente crítica normal.—La curva de pendiente crítica, como la trazada en la figura 15, es una característica

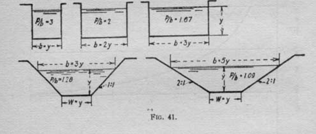


Fig. 41.

inherente a la sección del canal. Depende de la forma de la sección y de la rugosidad de las paredes, siendo función del calado y.

Para un caudal dado es conveniente fijar como parámetros característicos ciertos valores particulares de la pendiente crítica, a saber: (1) la pendiente crítica σ_0 para el calado normal y_0 y (2) la pendiente crítica σ_{cr} para el calado crítico y_{cr}. A σ_0 la denominaremos *pendiente crítica normal.*

Evidentemente, σ_{cr} es la pendiente con la que fluiría el caudal dado en estado crítico con movimiento uniforme.

Ejemplo 5.°

Cuestión 1.ª Representar la curva de pendiente crítica $\sigma = f(y)$, para el perfil de canal de la figura 14, utilizando los coeficientes de Bazin y además las Ecs. [42] ó [43].

Empleando la Ec. [43] y tomando los valores de C, p y b de la Tabla I y Tabla II, y los valores de g/C^2 de la figura 40, se tiene:

TABLA V

y	p	b	C	g/C^2 en $1 \cdot 10^{-4}$	p/b	σ en $1 \cdot 10^{-4}$
0,5	3,414	3,00	58,155	29,006	1,138	33,009
1,0	4,828	4,00	62,999	24,718	1,207	29,835
1,5	6,243	5,00	65,561	22,823	1,248	28,483
2,0	7,657	6,00	67,285	21,668	1,276	27,648
2,5	9,071	7,00	68,557	20,872	1,295	27,029
3,0	10,485	8,00	69,544	20,278	1,310	26,564
3,5	11,899	9,00	70,388	19,800	1,322	26,175
4,0	13,314	10,00	71,136	19,386	1,331	25,803
4,5	14,728	11,00	71,723	19,070	1,339	25,534
5,0	16,142	12,00	72,259	18,788	1,345	25,270
5,5	17,556	13,00	72,803	18,508	1,350	24,986
6,0	18,970	14,00	73,232	18,292	1,355	24,786

En la figura 15 se dibuja la curva correspondiente.

Cuestión 2.ª Determinar σ_0 y σ_{cr} para un caudal $Q=10$ m³/seg. con $s_0=5 \cdot 10^{-4}$.

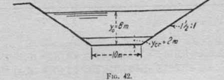


FIG. 42.

Para el calado normal y_0 se tiene:

$$\mathfrak{K}_0 = Q/\sqrt{s_0} = 10/\sqrt{5} \cdot 10^{-2} = 447{,}207\ ;$$

en la curva $\mathfrak{K}$ (fig. 15) corresponde el valor $y_0=1{,}78$ m.
Para el calado crítico

$$\mathfrak{M}_c = Q/\sqrt{g} = 10/3{,}132 = 3{,}193$$

y de la curva $\mathfrak{M}$ (fig. 15)

$$y_{cr}=1{,}11 \text{ m.}$$

Los valores de σ_0 y σ_{cr}, que corresponden en la curva σ (figura 15) a $y_0=1,78$ e $y_{cr}=1,11$, son prácticamente 27 $^{00}/_{00}$ y 30 $^{00}/_{00}$, respectivamente.

Cuestión 3.ª Supongamos que en el canal de la figura 42 $y_0=8,00$ m. e $y_{cr}=2$ m. Determinar σ_0 y σ_{cr}, empleando coeficientes de G. K., para $s_0=10$ $^{00}/_{00}$ con $n=0,013$ y $n=0,025$, respectivamente.

1. Los elementos geométricos son, en este caso:

$y=2$ m.; $a=26$; $b=16$; $p=17,2$; $p/b=1,073$; $R=1,51$
$y=8$ m.; $a=176$; $b=34$; $p=38,8$; $p/b=1,14$; $R=4,54$

2. Valores de C y σ:

	$n=0,013$	$n=0,025$
Para $y=2$ $R=1,51$	$C=80,632$ $\sigma'=15,09\times10^{-4}$	$C=43,048$ $\sigma'=52,94\times10^{-4}$
Para $y=8$ $R=4,54$	$C=88,341$ $\sigma'=12,57\times10^{-4}$	$C=50,116$ $\sigma'=39,06\times10^{-4}$

3. Valores de σ ($\sigma=\sigma'\,.\,p/b$):

σ_{cr} para $y_{cr}=2$ m.

Con $n=0,013$; $\sigma_{cr}=15,09\times10^{-4}\times1,073=16,19$ $^{00}/_{00}$
Con $n=0,025$; $\sigma_{cr}=52,94\times10^{-4}\times1,073=56,80$ $^{00}/_{00}$

σ_0 para $y_0=8$ m.

Con $n=0,013$; $\sigma_0=12,57\times10^{-4}\times1,14=14,33$ $^{00}/_{00}$
Con $n=0,025$; $\sigma_0=39,06\times10^{-4}\times1,14=44,53$ $^{00}/_{00}$

20. OTRAS FORMAS DE LA ECUACIÓN DEL RÉGIMEN VARIADO.—La ecuación [21]

$$\frac{dy}{dx}=s_0\,\frac{1-(\mathfrak{K}_0/\mathfrak{K})^2}{1-\dfrac{Q^2}{g}\,\dfrac{b}{a^3}}$$

puede presentarse en otras formas:

1.ª Sustituyendo en el denominador, de acuerdo con las Ecs. [28] y [29]:

$$Q^2/g\mathfrak{M}_c^2\,;\quad b/a^3 = 1/\mathfrak{M}^2,$$

se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = s_0 \frac{1-(\mathfrak{K}_0/\mathfrak{K})^2}{1-(\mathfrak{M}_c/\mathfrak{M})^2} \qquad [44]$$

Para aclarar esto, recordemos que $\mathfrak{K}$ y $\mathfrak{M}$ representan las funciones $\mathfrak{K}=aC\sqrt{R}$ y $\mathfrak{M}=a\sqrt{a/b}$ del calado, mientras que $\mathfrak{K}_0$ y $\mathfrak{M}_c$ son determinados valores paramétricos de ambas funciones, para el calado normal y_0 y para el calado crítico y_{cr}, respectivamente.

2.ª Se obtiene otra forma poniendo en el denominador $\mathfrak{M}$ en función de $\mathfrak{K}$. Por la Ec. [42] se tiene:

$$\mathfrak{M}^2 = \frac{a^3}{b} = \mathfrak{K}^2 \frac{\sigma}{g};$$

y, por otra parte, $Q^2/g = \mathfrak{K}_0^{\,2} s_0/g$; por tanto,

$$1 - \frac{Q^2 b}{g a^3} = 1 - \frac{s_0\,\mathfrak{K}_0^2}{g} \cdot \frac{g}{\sigma\,\mathfrak{K}^2} = 1 - \frac{s_0}{\sigma}\left(\frac{\mathfrak{K}_0}{\mathfrak{K}}\right)^2 \qquad [45]$$

y haciendo $s_0/\sigma = s_0/\sigma_0 \cdot \sigma_0/\sigma$, donde σ_0 es la pendiente crítica *normal*, se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = s_0 \frac{1-(\mathfrak{K}_0/\mathfrak{K})^2}{1-\frac{s_0}{\sigma}\left(\frac{\mathfrak{K}_0}{\mathfrak{K}}\right)^2} = s_0 \frac{1-(\mathfrak{K}_0/\mathfrak{K})^2}{1-\frac{s_0}{\sigma_0}\cdot\frac{\sigma_0}{\sigma}\cdot\left(\frac{\mathfrak{K}_0}{\mathfrak{K}}\right)^2} \qquad [46]$$

Puesta en esta última forma puede emplearse la Ec. [46] para integración y, por consiguiente, para la determinación de las curvas de superficie libre $y=f(x)$. Cuando se dan la forma del canal, la rugosidad de las paredes, la pendiente de la solera s_0 y el caudal Q, la Ec. [46] da la derivada del calado en función solamente de dos variables: $\mathfrak{K}_0/\mathfrak{K}$ y σ_0/σ. Ambas variables, a su vez, son funciones de y o de y/y_0.

Para $y=y_0$, ambas relaciones, $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_0$ y σ_0/σ, son $=1$. Designando, en particular,

$$\frac{s_0}{\sigma} = \beta \quad \text{y} \quad \frac{s_0}{\sigma_0} = \beta_0, \quad \text{de donde} \quad \beta = \beta_0 \frac{\sigma_0}{\sigma} \qquad [47]$$

se tiene la Ec. [46] en la forma

$$\frac{dy}{dx} = s_0 \frac{1 - (\mathfrak{K}_0/\mathfrak{K})^2}{1 - \beta(\mathfrak{K}_0/\mathfrak{K})^2} \qquad [48]$$

En las Ecs. [47] y [48], β_0 es un nuevo parámetro, mientras que σ_0/σ y β reflejan la variación de la pendiente crítica al variar el calado. Usualmente esta variación no es muy sustancial, y dentro de ciertos límites (V. Cuestión 2.ª, Ejemplo 5.º) el valor de σ_0/σ y, por consiguiente, el valor de β, pueden aceptarse prácticamente constantes. En la práctica de integración se descompondrá el tramo en zonas, para cada una de las cuales se supondrá constante el valor de β.

CAPITULO V

RECAPITULACION: LAS CARACTERISTICAS DEL REGIMEN

Para evitar posibles confusiones en relación con los muchos conceptos introducidos a lo largo del estudio que precede, resumimos a continuación, a modo de sumario, las distintas características del régimen.

21. CARACTERÍSTICAS DE LA SECCIÓN TRANSVERSAL DE UN CANAL.—Se dice que un canal está definido cuando se conocen:

La forma y dimensiones de la sección transversal.

La naturaleza de las paredes (coeficiente de rugosidad).

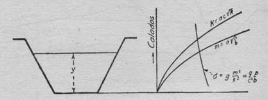


FIG. 43.—Curvas características de la sección de un canal.

Una sección de canal dada posee las siguientes características, inherentes a la misma como tal sección, que son funciones del calado (fig. 43. V. también fig. 15):

1.ª La curva de coeficientes de gasto $\mathfrak{K} = aC\sqrt{R}$.

2.ª La curva $\mathfrak{M}$.......................... $\mathfrak{M} = a\sqrt{a/b}$.

3.ª La curva de pendiente crítica..... $\sigma = \frac{g}{C^2} \cdot \frac{p}{b} = g \frac{\mathfrak{M}^2}{\mathfrak{K}^2}$.

También:

4.ª La curva de velocidad crítica.... $v_c=\sqrt{g}\sqrt{\delta}=\sqrt{g}\sqrt{a/b}$.

5.ª La curva de caudal crítico......... $Q_{cr}=\sqrt{g}\,\mathfrak{M}=a\sqrt{g}\sqrt{a/b}$.

Las curvas $\mathfrak{M}$, v_c y Q_{cr} dependen solamente de la forma geométrica de la sección transversal.

Las curvas $\mathfrak{K}$ y σ dependen de la rugosidad de las paredes. Si se emplea una fórmula de C, por ejemplo la de C · K, donde se supone que C varía con la pendiente de la solera, debe tenerse en cuenta el posible efecto de tal variación.

En las láminas que se acompañan al final del libro se incluyen series de curvas características correspondientes a secciones empleadas en diversos ejemplos.

22. PARÁMETROS DEL RÉGIMEN.—Se dice que está definido un *tipo* de régimen cuando se conocen:

La pendiente del canal (definida en el artículo precedente).

La pendiente s_0 de la solera.

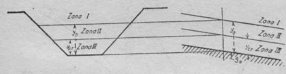


FIG. 44.—Las zonas del régimen.

El caudal Q que fluye por el canal.

Los parámetros del movimiento serán, por tanto:

1.° El calado normal y_0, que es el calado del movimiento uniforme para el caudal Q con la pendiente s_0. y_0 se determina por la curva $\mathfrak{K}$ como valor correspondiente a $\mathfrak{K}_0=Q/\sqrt{s_0}$.

2.° El calado crítico y_{cr}, que es el calado con el que fluiría el caudal Q en un canal dado con un contenido mínimo de energía específica. y_{cr} se determina mediante la curva $\mathfrak{M}(y)$ como calado correspondiente a $\mathfrak{M}_c=Q/\sqrt{g}$.

3.° Las pendientes críticas σ_0 y σ_{cr}, correspondientes, respectivamente, a y_0 e y_{cr}.

Zonas de cambio de régimen.—Los calados normal y crítico dividen la sección, conforme se representa en la figura 44, en las tres zonas que se especifican.

Curvas auxiliares.—En la práctica, se recurre a veces a las siguientes curvas:

4.° Curva de caudal normal $Q_0=f(y_0)$; curva de caudales con movimiento uniforme $Q=\mathfrak{K}_0\sqrt{s_0}$.

5.° Curva σ_0/σ y a veces la curva σ_{cr}/σ, que representan la relación de σ_0 y σ_{cr} a la pendiente crítica variable.

6.° Curva de energía específica $\varepsilon=y+\frac{v^2}{2g}=y+\frac{Q^2}{2ga^2}$.

CAPITULO VI

CLASIFICACION DEL REGIMEN

23. Pendientes «suaves» y «fuertes».—Fué Bélanger (1828) quien, comentando las experiencias de Bidone sobre el resalto, hizo distinción entre los cursos naturales, en los que tiene lugar la formación del resalto, y aquellos en que el enlace con la lámina no perturbada de la sobreelevación provocada por una presa se realiza mediante una curva

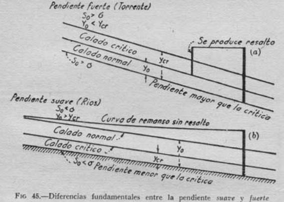


Fig 45.—Diferencias fundamentales entre la pendiente *suave* y *fuerte* de la solera.

continua (fig. 3). Naturalmente, sólo puede producirse el resalto (fig. 34) cuando el agua fluye con un calado menor que el crítico ($y_0 < y_{cr}$, fig. 45 *a*). Por el contrario, en el caso en que $y_0 > y_{cr}$ (fig. 45 *b*), la curva de enlace permanece totalmente comprendida en la rama superior de la curva de energía, formándose una curva continua del tipo representado en la figura 3.

Como los valores relativos de y_0 e y_{cr} dependen de la magnitud de la pendiente de la solera, hay que definir lo que se entiende por pendiente *fuerte* o *suave*: se dice que la pendiente s_0 es suave cuando es inferior a la crítica ($s_0 < \sigma_0$) y cuando hace que $y_0 > y_{cr}$, mientras que se aplica la denominación de *fuerte* en el caso contrario.

Saint Vénant llamaba a las corrientes naturales de pendiente suave, en las que existe calma, movimiento tranquilo y remansos, *ríos*, mientras que a las que, con fuerte pendiente, ofrecen resaltos, cataratas y otras irregularidades, las denomina *torrentes*.

24. Estados del régimen.—La anterior distinción, si bien es útil a veces, no es completamente satisfactoria para

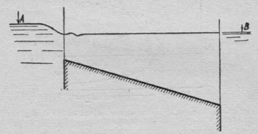


Fig. 46.—Superficie libre sin formación de resalto en un canal con pendiente fuerte.

penetrar en la esencia de los hechos. Ya Boussinesq apuntó certeramente que es esencial distinguir los diferentes *estados de régimen* posibles. Un resalto, como el representado en las figuras 7 y 8, puede tener lugar en un canal de pendiente suave con $s_0 < \sigma_0$, y también puede formarse curva de remanso, sin resaltos, en un río (fig. 46) de pendiente fuerte.

En efecto: todo depende de que la velocidad del movimiento sea superior o inferior a la crítica, o en otros términos, de que el calado sea inferior o superior al crítico.

Mediante la curva de energía específica se tiene una visión clara de los estados del régimen. En la figura 47 el calado crítico divide a todas las formas posibles del régi-

men en dos *zonas*, correspondientes a los dos estados principales del régimen:

1.ª *Zona T*, que corresponde a la rama superior de la curva ε, en donde $y > y_{cr}$ y $v < v_{cr}$, cuyo régimen denominaremos *lento*.

2.ª *Zona R*, correspondiente a la rama inferior. Se produce en ella el *régimen rápido*.

3.ª Entre ambas se encuentra el punto de separación

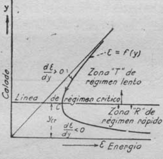


FIG. 47.—Las diversas formas de régimen en relación con el diagrama de energía específica.

C, que corresponde al régimen crítico o régimen en *estado crítico*. Rehbock, más adecuadamente, aplica la palabra *fluyente* (fliessend) para el régimen lento y *disparado* (schiessend) al rápido.

La distinción física básica entre los diferentes estados del régimen la realiza la curva de energía específica. Se verifica:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{En régimen lento:} & \varepsilon \text{ aumenta con } y\text{; } \partial\varepsilon/\partial y > 0 \\ \text{— rápido:} & \varepsilon \text{ disminuye con } y\text{; } \partial\varepsilon/\partial y < 0 \\ \text{— crítico:} & \varepsilon \text{ es mínimo; } \partial\varepsilon/\partial y = 0 \end{array}\right\} \quad [50]$$

Estas relaciones sencillas ayudarán a explicar algunas modalidades y fenómenos del movimiento en general.

25. OBSTÁCULOS SUMERGIDOS.—Uno de éstos es el efecto producido en la superficie de una corriente líquida por un obstáculo sumergido, tal como un gran canto rodado o una elevación local del fondo. En un *río* tal obstáculo a veces no produce efectos visibles, o da lugar a remolinos superficiales y a una ligera depresión local de la lámina. En un *torrente*, un obstáculo en el fondo produce generalmente una zona de espuma, limitada frecuentemente por un resalto local de naturaleza ondular. En términos generales, la superficie de un torrente que discurre por un lecho rocoso está materialmente cubierta de

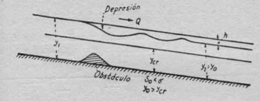


FIG. 48.—Obstáculo en una corriente con pendiente suave.

tales zonas de espuma. En régimen rápido, la presencia de tales protuberancias corresponde a la formación de depresiones en el régimen lento, lo cual se explica por el hecho de que el sobrepasar un obstáculo va acompañado de una pérdida de energía. Pero la pérdida de energía, en régimen lento, se traduce en una depresión de la superficie, mientras que en régimen rápido la disipación de energía va acompañada de un aumento del calado.

La diferencia es, particularmente, señalada en el caso de una barrera sumergida. En un *río* (fig. 48), si la barrera no es demasiado alta se produce generalmente lo que Bazin llamó *lámina ondulada*, es decir, una serie de ondulaciones gradualmente decrecientes que siguen a la depresión inicial. El calado y_1 anterior a la barrera es algo mayor que el y_2; la diferencia $h = y_1 - y_2$ es la pérdida de altura debida al paso sobre el vertedero anegado. En un *torrente* la barrera es cruzada por lo que puede llamarse *onda*

inmóvil en forma de una superficie ondular simple no acompañada de más ondulaciones. En este caso, por lo

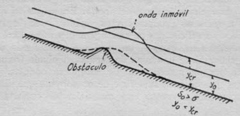


FIG. 49.—Obstáculo en un torrente; la onda *estacionaria*.

menos cuando se trata de movimiento uniforme, los calados, antes y después del obstáculo, son iguales. La figu-

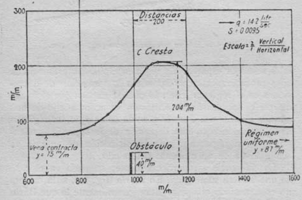


FIG. 50.—Ejemplo de onda *estacionaria*.

ra 50 representa el perfil de una onda inmóvil observada por el autor (1). La altura de la onda era, aproximadamen-

(1) Laboratorio de Hidráulica del Instituto Politécnico, San Petersburgo, 1911.

te, el doble del calado primitivo. El régimen rápido era provocado por el desagüe de una compuerta. (Véase fig. 7.)

Como era de esperar, la onda inmóvil sólo puede tener lugar cuando la barrera no sobrepasa una determinada altura; para alturas mayores cambia el tipo de fenómeno, formándose una curva de depresión precedida de un resalto (fig. 51). La superficie de la onda inmóvil es continua, no impidiendo el paso de un pequeño objeto flotante tal

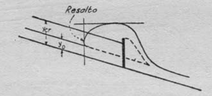


FIG. 51.—Régimen sobre un obstáculo en un canal de pendiente fuerte, con formación de resalto.

como un trozo de madera, etc. En cambio, el remolino que se forma al pie del resalto (fig. 51) rompe la continuidad superficial, impidiendo generalmente u obstaculizando el paso de objetos flotantes.

26. ESTABLECIMIENTO DEL RÉGIMEN.—La ausencia de ondulaciones en la figura 49, en contraposición con la figura 48, pone de manifiesto otra faceta de carácter general, también desentrañada teóricamente por Boussinesq y en concordancia con la observación. Nos referimos a las formas de la superficie en las *zonas de transición*, donde se «establece» por sí mismo el régimen. Un ejemplo es la toma de agua de un canal (fig. 52). Antes de la sección *a* existe el nivel normal del embalse; después de la sección 1 el régimen es uniforme. El trayecto comprendido entre ambas es el de transición, donde se estabiliza el régimen, al que son de aplicación los razonamientos de Boussinesq. En la figura 52 esta zona de transición presenta una superficie ondular. Tal es, siempre, el caso, cuando la pendiente del cauce es suave o, lo que es lo mismo, cuando el régimen que se establece es lento. Otro ejemplo es el de

un vertedero en pared gruesa (fig. 37); aquí el calado es próximo al crítico. Refiriéndonos al diagrama de energía se ve que en las proximidades del calado crítico la curva de

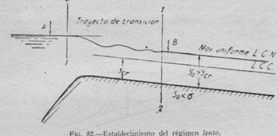


FIG. 52.—Establecimiento del régimen *lento*.

energía es muy pendiente, de modo que prácticamente a una variación insignificante de la energía corresponde, en esa zona, una variación sensible del calado. Esta circunstancia, unida al efecto de curvatura sobre la magnitud del calado crítico (art. 17), explica la formación de las ondulaciones pronunciadas características del caso.

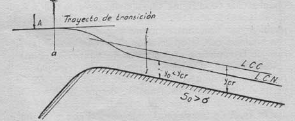


FIG. 53.—Establecimiento del régimen *rápido*.

La figura 53 representa una toma con pendiente fuerte del cauce. El movimiento uniforme rápido después de la sección 1 va precedido por una sección transitoria, donde

no se forman ondulaciones. Este es siempre el caso cuando el movimiento que se establece es rápido. Otro ejemplo se da en la figura 54, donde una corriente en régimen rápido desagua a un cauce horizontal suficientemente corto para que no llegue a alcanzarse el calado crítico. Aquí no se producen ondulaciones.

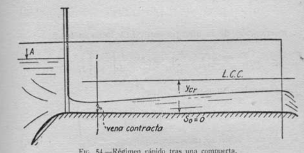


FIG. 54.—Régimen rápido tras una compuerta.

27. EL FACTOR CINÉTICO DEL RÉGIMEN.—En el régimen lento predomina la energía potencial, mientras que en el rápido el predominio es de la energía cinética.

Para medir el *grado de rapidez* o de *lentitud* del régimen, traduciendo a expresión numérica el estado del mismo, emplea el autor la noción de *factor cinético de régimen*, que designaremos por λ, y se define mediante la ecuación de la energía específica de la siguiente forma:

$$\varepsilon = y + \frac{v^2}{2g} = y\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{v^2}{gy}\right) = y\left(1 + \frac{1}{2}\lambda\right). \qquad [51]$$

El factor cinético de régimen es igual a

$$\lambda = 2 \cdot \frac{v^2/2g}{y} = 2 \cdot \frac{Q^2}{2ga^2y} = \frac{Q^2}{ga^2y}. \qquad [52]$$

o sea, el duplo de la relación de la energía cinética a la potencial. El factor cinético es, por tanto, una medida de la *cineticidad del régimen*. Se puede hablar de régimen en estado de «alta» o «baja» cineticidad. En cada caso, el

grado de cineticidad vendrá calibrado por el correspondiente valor de λ, lo mismo que el estado térmico se pondera por la temperatura.

Perfil rectangular.—En el caso de sección rectangular, aplicando la Ec. [52] a una unidad de ancho del canal, y recordando que $q^2/g = y^3_{cr}$, el factor cinético vale:

$$\lambda = q^2/gy^3 = (y_{cr}/y)^3 \qquad [53]$$

y la ecuación de la energía específica toma la forma:

$$\varepsilon = y\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) = y\left(1 + \frac{1}{2}\left[\frac{y_{cr}}{y}\right]^3\right) \qquad [54]$$

En particular, en estado crítico,

$$\lambda_{cr} = 1; \quad \varepsilon_{cr} = y_{cr}\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) = 1{,}5\, y_{cr}$$

El régimen lento se caracteriza por [55]

$$\lambda < 1\ ;\ \varepsilon < 1{,}5y$$

y en el régimen rápido, por

$$\lambda > 1\ ;\ \varepsilon > 1{,}5y$$

El caso particular, muy interesante en la práctica, de un canal rectangular fluyendo en régimen crítico, se caracteriza por el sencillo símbolo $\lambda = 1$, lo que explica la definición adoptada.

Secciones transversales de forma cualquiera.—Se obtiene una expresión general del factor cinético, aplicable a una sección de forma cualquiera, sustituyendo en la Ec. [52] Q^2/g por el valor equivalente de $\mathfrak{M}^2_{cr}$ (v. Ec. [30]), y por otro lado (Ecs. [29] y [37]), haciendo $\mathfrak{M}^2 = a^2 \frac{a}{b} = a^2 \delta$, o sea $a^2 = \frac{\mathfrak{M}^2}{\delta}$; de donde

$$\lambda = Q^2/ga^2y = \mathfrak{M}^2_{cr}/\mathfrak{M}^2 \times \delta/y \qquad [56]$$

y la energía específica

$$\varepsilon = y(1 + \tfrac{1}{2}[\mathfrak{M}_{cr}/\mathfrak{M}]^2 \cdot \delta/y). \qquad [57]$$

Naturalmente que la Ec. [54] es un caso particular de la [57]. En efecto: para un perfil rectangular

$$\delta/y = 1 \text{ y } (\mathfrak{M}_{cr}/\mathfrak{M})^2 = (y_{cr}/y)^3.$$

En régimen crítico, el valor de $\mathfrak{M}$ del denominador de la Ec. [56] es $\mathfrak{M}_{cr}$. Por tanto, en estado crítico

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = 1 \,.\, \delta/y \;;\; \varepsilon_{cin} = \tfrac{1}{2}y \,.\, \delta/y \\ \varepsilon_{cr} = y_{cr}(1 + \tfrac{1}{2}[\delta/y]) \end{array}\right\} \qquad [58]$$

Comparando con el caso del canal rectangular, el contenido de energía específica en régimen crítico difiere en el factor δ/y, es decir, la relación entre el calado medio de la sección ($\delta = a/b$) al calado actual del régimen, y.

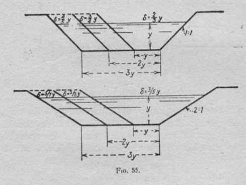


Fig. 55.

Para un canal de tipo corriente, en los que δ es siempre menor que y, $\delta/y < 1$ y $\lambda_{cr} < 1$.

En la figura 55 se dan para algunas secciones usuales los valores de δ/y. Es poco frecuente que δ/y baje de 0,5, estando casi siempre comprendido entre 0,5 y 1.

Para tales límites, la energía específica con calado crítico fluctúa entre

$$1{,}25y < \varepsilon_{cr} < 1{,}5y.$$

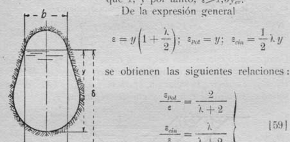
El movimiento con $\lambda > 1$ y $\varepsilon > 1{,}5y$ será, en todas las circunstancias, movimiento *rápido*. Por otra parte, con $\lambda < 0{,}5$ y $\varepsilon < 1{,}25y$ será *prácticamente* siempre régimen lento.

Para secciones cerradas, como el caso de un colector (figura 56), en las que el ancho decrece al aumentar el calado, el calado medio δ será mayor que y. En tal caso, el factor cinético λ_{cr} para el calado crítico puede ser mayor que 1, y por tanto, $\varepsilon > 1{,}5 y_{cr}$.

De la expresión general

$$\varepsilon = y\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right); \quad \varepsilon_{pot} = y; \quad \varepsilon_{cin} = \frac{1}{2}\lambda y$$

se obtienen las siguientes relaciones:



$$\left.\begin{aligned} \frac{\varepsilon_{pot}}{\varepsilon} &= \frac{2}{\lambda + 2} \\ \frac{\varepsilon_{cin}}{\varepsilon} &= \frac{\lambda}{\lambda + 2} \\ \varepsilon_{cin}/\varepsilon_{pot} &= \lambda/2 \end{aligned}\right\} \qquad [59]$$

FIG. 56.

EJEMPLO 6.°

Cuestión 1.ª Supuesto un caudal de $Q = 200$ m³/seg. fluyendo por un canal rectangular de 10 m. de ancho, determinar el factor cinético y el contenido de energía del régimen para los valores de y: 1 m., 0,5 m., 2 m., 5 m. y 10 m.

Se tendrá:

$$q = {}^{200}/_{10} = 20 \text{ m}^3/\text{seg.}; \quad y_{cr} = \sqrt[3]{q^2/g} = \sqrt[3]{400/9{,}81} = 3{,}44 \text{ m.}$$

El factor cinético para el calado $y = 1$ m. es

$$\lambda = (y_{cr}/y)^3 = (3{,}44/1)^3 = 40{,}6$$

y para los otros calados vale, respectivamente:

$$\lambda = (3{,}44/0{,}5)^3 = 325;$$
$$\lambda = (3{,}44/2\;)^3 = 5{,}09;$$
$$\lambda = (3{,}44/5\;)^3 = 0{,}327;$$
$$\lambda = (3{,}44/10\;)^3 = 0{,}0407.$$

El contenido de energía para $y=y_{cr}$ es

$$\varepsilon_{cr}=3{,}44\times 1{,}5=5{,}16 \text{ m.}$$

y para

$$y=0{,}5 \text{ m.} \quad \varepsilon=y\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)=0{,}5\left(1+\frac{325}{2}\right)=81{,}75 \text{ m.} \quad \varepsilon_{cin}=81{,}25 \text{ m.}$$

$$y=1 \text{ m.} \quad \varepsilon=1\left(1+\frac{40{,}6}{2}\right)=21{,}3 \text{ m.} \quad \varepsilon_{cin}=20{,}3 \text{ m.}$$

$$y=2 \text{ m.} \quad \varepsilon=2\left(1+\frac{5{,}09}{2}\right)=7{,}09 \text{ m.} \quad \varepsilon_{cin}=5{,}09 \text{ m.}$$

$$y=5 \text{ m.} \quad \varepsilon=5\left(1+\frac{0{,}327}{2}\right)=5{,}82 \text{ m.} \quad \varepsilon_{cin}=0{,}82 \text{ m.}$$

$$y=10 \text{ m.} \quad \varepsilon=10\left(1+\frac{0{,}0407}{2}\right)=10{,}20 \text{ m.} \quad \varepsilon_{cin}=0{,}20 \text{ m.}$$

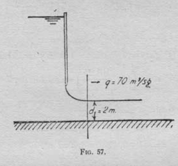


FIG. 57.

Cuestión 2.ª ¿Cuál es el grado de *rapidez* de una corriente que pasa bajo una compuerta (fig. 57) a un canal rectangular con un caudal por unidad de ancho $q=70$ m³/seg. con $d_1=2$ m.?

El factor cinético puede determinarse directamente por la Ec. [53]:

$$\lambda=\frac{q^2}{gd_1^3}=\frac{70^2}{9{,}81\cdot 8}=62{,}4; \qquad \varepsilon=2\left(1+\frac{62{,}4}{2}\right)=64{,}4 \text{ m.}$$

Cuestión 3.ª Un caudal de 520 m³/seg. circula por un canal (fig. 58) en estado crítico, con $y_{cr}=3$ m. Determinar el contenido de energía específica. Hallar también el factor

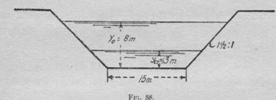


FIG. 58.

cinético y el contenido de energía para el mismo caudal con los calados $y=1$ m. e $y=8$ m.

Para $y=3$ m. el calado medio es $\delta=\dfrac{a}{b}=58{,}5/24=2{,}44$ m.

$$\lambda_{cr}=1\cdot\frac{\delta}{y}=\frac{2{,}44}{3}=0{,}813\,;\qquad \varepsilon_{cr}=3\left(1+\frac{0{,}813}{2}\right)=4{,}22\text{ m}.$$

Para $y=1$ m., $a=16{,}5$ m²,

$$\lambda=Q^2/ga^2y=(520/16{,}5)^2\cdot 1/9{,}81\times 1=101{,}24$$

$$\varepsilon=1\left(1+\frac{101{,}24}{2}\right)=51{,}62\text{ m}.$$

Para $y=8$ m., $a=216$ m²,

$$\lambda=(520/216)^2\cdot 1/9{,}81\times 8=0{,}0738$$

$$\varepsilon=8(1+0{,}0369)=8{,}2952\text{ m}.$$

Cuestión 4.ª Dibujar la curva de factor cinético $\lambda=f(y)$ para el canal de la fig. 14, con $Q=50$ m³/sg $\cdot\ \lambda=2v^2/2g\cdot 1/y$; pueden emplearse directamente los resultados de la Tabla IV, donde en la última columna se dan los valores de λ. En la figura 33 se representa la curva.

CAPITULO VII

PROPIEDADES Y TIPOS DE LAS CURVAS DE SUPERFICIE

28. NOMENCLATURA.—En el artículo 2 se ha hecho distinción entre curvas «ascendentes» y de «depresión», según

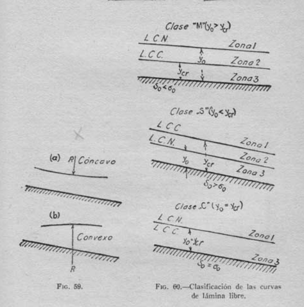


FIG. 59.

FIG. 60.—Clasificación de las curvas de lámina libre.

que en el movimiento del líquido el calado crezca o decrezca en la dirección de la corriente. En lo sucesivo seña-

ojo!!!...

laremos con un signo + o −, según que un determinado factor crezca o decrezca en el sentido de la corriente. Por consiguiente, designaremos:

Una curva ascendente con $dy/dx>0$, por el símbolo y^+
Una curva descendente con $dy/dx<0$, por el símbolo y^- [60]

Curvas cóncavas y convexas.—Para designar la curvatura de una lámina se supone que el observador se coloca encima de la corriente. Por consiguiente, las curvas con el radio de curvatura dirigido hacia arriba (fig. 59 *a*) serán *cóncavas*, mientras que las curvas como la representada en la figura 59 *b*, con el radio de curvatura dirigido hacia abajo, serán *convexas*.

Clases de curvas.—Con referencia a las zonas de régimen que se han establecido en la figura 44, todas las curvas posibles pueden dividirse en ciertas clases, que dependen de la posición relativa de las líneas y_0 e y_{cr}. Las tres combinaciones posibles vienen dadas en la figura 60, designándose las clases respectivas por las letras *M*, *S* y *C*. En cada clase existen tres zonas que se especifican mediante subíndices de la respectiva letra que indica la clase.

La posición relativa de las líneas y_0 e y_{cr} depende del valor de la pendiente del fondo. El movimiento, según líneas de la clase *M* con y_0 mayor que y_{cr}, tendrá lugar cuando la pendiente del fondo sea suave con $s_0<\sigma_0$. Las letras que designan las clases se han escogido de acuerdo con la siguiente tabla:

Clase *M*: Pendiente del fondo—*suave*; $y_0>y_{cr}$; $s_0<\sigma_0$
régimen uniforme —*lento*.
Clase *S*: Pendiente del fondo—*fuerte*; $y_0<y_{cr}$; $s_0>\sigma_0$
régimen uniforme —*rápido*. [61]
Clase *C*: Pendiente del fondo—*crítica*; $y_0=y_{cr}$; $s_0=\sigma_0$
régimen uniforme —*crítico*.

En la figura 60 se aclara esto situando las zonas respectivas. La zona 1, en todos los casos está por encima del calado *uniforme* y del *crítico*. La zona 3, en todos los casos está por debajo de y_0 e y_{cr}. La zona 2 está entre y e y_{cr}, con

una posición relativa respecto a y_0 e y_{cr}, según el valor de $s_0 \gtrless \sigma_0$.

En el caso de la clase C con $s_0=\sigma_0$, la zona 2 desaparece, subsistiendo solamente las zonas 1 y 3.

Tipos de curvas.—A cada zona corresponde uno y solamente un «tipo» de curva de lámina libre. Designaremos el tipo por el signo de la zona respectiva. Así, por ejemplo, una curva M_2 significa que la curva de lámina libre particular está localizada en la zona 2 y es de clase M. Será una curva de superficie en un canal caracterizado por $y_0>y_{cr}$: $s_0<\sigma_0$. La curva señalada con el subíndice 2 corresponderá a calados comprendidos entre los límites $y_{cr}<y<y_0$. Evidentemente, sólo pueden darse «ocho tipos posibles» de curvas de lámina libre, uno para cada zona; es decir: tres de la clase M, tres de la clase S y dos de la clase C.

Seguidamente procederemos a establecer las propiedades y forma de tales curvas. Haremos uso del diagrama de energía específica (fig. 47) en su relación con los estados de régimen, así como de las reglas que rigen la variación de la energía en el movimiento flúido compendiadas en la Ec. [25].

29. BALANCE DE LA ENERGÍA MEDIANTE LAS CURVAS ε^+ Y ε^-.—Con referencia a las variaciones de la energía específica de una sección a otra en la dirección de la corriente, se pueden distinguir:

1.° Régimen con incremento de energía específica.

2.° Régimen con pérdida de energía específica.

3.° Régimen con energía específica constante.

Uno u otro caso dependen de la *posición* del calado variable y con relación al calado normal y_0. Con referencia a la Ec. [25], se puede formar la siguiente tabla:

$$\left.\begin{array}{l} y>y_0,\ \partial\varepsilon/\partial x>0\ ;\ \text{curva } \varepsilon^+ \\ y<y_0,\ \partial\varepsilon/\partial x<0\ ;\ \text{curva } \varepsilon^- \\ y=y_0,\ \partial\varepsilon/\partial x=0\ ;\ \text{curva } \varepsilon^0 \end{array}\right\} \qquad [62]$$

La cuestión de si una determinada curva es una curva y^+ o y^-, o en otros términos, si ε^+ y ε^- conducen a $dy/dx>0$ o a $dy/dx<0$ y viceversa, depende de si el movimiento que

se considera corresponde a la parte superior o inferior de la curva ε; es decir, si el movimiento en cuestión está en estado lento o rápido.

En movimiento lento, cuando $y>y_{cr}$, la energía aumenta con el calado, $\partial\varepsilon/\partial y>0$; por consiguiente, cuando

$y>y_0$ es $\partial\varepsilon/\partial x>0$	lo cual conduce a	$dy/dx>0$	[63]
$y<y_0$ es $\partial\varepsilon/\partial x<0$		$dy/dx<0$	

se tiene, en el caso de $y>y_0$, una curva y^+, y en el caso de $y<y_0$, una curva y^-; los signos de $\partial\varepsilon/\partial x$ y dy/dx son entonces iguales.

En estado rápido se tiene el caso contrario. Con $y<y_{cr}$, un incremento de energía se traduce en una disminución del calado: $\partial\varepsilon/\partial y<0$; y entonces, cuando

$y>y_0$ es $\partial\varepsilon/\partial x>0$	lo cual conduce a	$dy/dx<0$	[64]
$y<y_0$ es $\partial\varepsilon/\partial x<0$		$dy/dx>0$	

en el caso de $y>y_0$ se tiene una curva y^-, mientras que si $y<y_0$ la curva es y^+. Los signos de $\partial\varepsilon/\partial x$ y dy/dx son opuestos.

Teniendo esto presente es fácil determinar el signo de dy/dx en todas y cada una de las zonas.

Zona 1. Esta zona se encuentra siempre por encima del calado normal ($y>y_0$) y en ella, siempre, $\partial\varepsilon/\partial x>0$. Por tanto, las curvas de la Zona 1 son siempre curvas ε^+.

Como, por otra parte, el régimen en esta zona es siempre lento, el aumento de energía va acompañado de incremento de calado. Por consiguiente, en todos los casos, $dy/dx>0$, de modo que las curvas de la Zona 1 pueden clasificarse en el tipo y^+.

Zona 3. Para esta zona, que en todos los casos se encuentra por debajo del calado normal con $y<y_0$, se tiene siempre $\partial\varepsilon/\partial x<0$. Todas las curvas son del tipo ε^-. El régimen en la Zona 3, por otra parte, con $y<y_{cr}$, será siempre rápido. La pérdida de energía entraña un aumento de calado. Por tanto, en todas las clases de curvas, $dy/dx>0$, siendo siempre del tipo y^+.

Zona 2. En la Zona 2, dy/dx es siempre negativa. En efecto: para curvas M_2, con $y<y_0$, se tiene $\partial\varepsilon/\partial x<0$; por

tanto, M_2 es una curva ε^-. Por otra parte, con $y>y_{cr}$, el movimiento es lento; en consecuencia, la pérdida de energía se traduce en un descenso de la lámina, de modo que $dy/dx<0$; resulta una curva y^-. En el caso de una curva S_2, $y>y_0$, de modo que $\partial\varepsilon/\partial x>0$; la curva es ε^+. Por otra parte, con $y<y_{cr}$ el movimiento es rápido; el incremento de energía requiere una disminución del calado, lo que conduce a $dy/dx<0$, resultando una curva del tipo y^-. Tabulando esta discusión se tiene (Ec. [65]):

<table>
<tr><th>Zona</th><th>Clase M
$y_0>y_{cr}$
$s_0<\sigma_0$</th><th>Clase C
$y_0=y_{cr}$
$s_0=\sigma_0$</th><th>Clase S
$y_0<y_{cr}$
$s_0>\sigma_0$</th></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="3">$y>y_0$, $\delta\varepsilon/\delta x>0$: curva ε^+
$y>y_{cr}$, régimen lento: $\delta\varepsilon/\delta y>0$
$dy/dx>0$, curva ascendente: y^+</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$y<y_0$, $\delta\varepsilon/\delta x<0$: curva ε^-
$y>y_{cr}$, régimen lento:
$\delta\varepsilon/\delta y>0$
Curva descendente:
$dy/dx<0$: y^-</td><td>No hay curva</td><td>$y>y_0$, $\delta\varepsilon/\delta x>0$: curva ε^+
$y<y_{cr}$, régimen rápido:
$\delta\varepsilon/\delta y<0$
Curva descendente:
$dy/dx<0$: y^-</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="3">$y<y_0$, $\delta\varepsilon/\delta x<0$: curva ε^-
$y<y_{cr}$, régimen rápido: $\delta\varepsilon/\delta y<0$
$dy/dx>0$, curva ascendente: y^+</td></tr>
</table>

Perfil de las curvas.—Las siguientes propiedades generales son comunes a todas las curvas:

1.ª Las curvas son asintóticas a la línea de calado uniforme y_0.
2.ª Son perpendiculares a la línea de calado crítico y_{cr}. [66]
3.ª Con el incremento de calado tienden a ser tangentes a una horizontal.

Para demostrar esto hagamos uso de la ecuación del régimen variado (Ec. [44]):

$$\frac{dy}{dx} = s_0 \frac{1 - (\mathcal{K}_0/\mathcal{K})^2}{1 - (\mathfrak{M}_0/\mathfrak{M})^2}$$

En lo que sigue se supondrá que $\mathfrak{K}=aC\sqrt{R}$ y $\mathfrak{M}=a\sqrt{a/b}$ son funciones continuas crecientes con el calado, de modo que para todo valor de y $\frac{d\,\mathfrak{K}}{dy}>0$ y $\frac{d\,\mathfrak{M}}{dy}>0$. Esto en la práctica no representa restricción alguna, ya que todas las secciones *abiertas* cumplen estas condiciones. La excepción la constituyen únicamente las secciones cerradas, y solamente por encima de un determinado calado y_m (fig. 61), próximo al lleno total, que corresponde al valor máximo del caudal, y por consiguiente, a $\mathfrak{K}_{max}$. Las excepciones de esta índole no son de importancia práctica por lo que concierne al régimen variado.

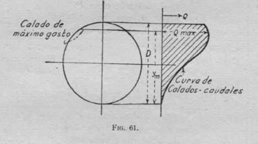


FIG. 61.

1.ª La tangencia asintótica de las curvas a la línea de calado normal se desprende del hecho de que al tender y a y_0 el valor de $\mathfrak{K}$ tiende a $\mathfrak{K}_0$, lo que hace que el numerador de la Ec. [44] tenga por límite

$$\lim\,(1-[\mathfrak{K}_0/\mathfrak{K}]^2)_{y=y_0}=0,$$

de donde

$$\lim\,(dy/dx)_{y=y_0}=0,$$

2.ª La perpendicularidad de las curvas a la línea de calado crítico se deduce de la consideración de que cuando y tiende a y_{cr}, $\mathfrak{M}$ tiende a $\mathfrak{M}_c$. El denominador se hace

$$\lim\,(1-[\mathfrak{M}_c/\mathfrak{M}]^2)_{y=_{cr}}=0$$

lo que hace que

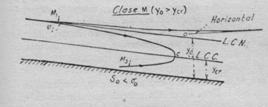
$$\lim\,(dy/dx)_{y=y_{cr}}=\infty$$

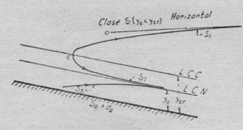
3.ª Al aumentar el calado $\mathfrak{K}$ y $\mathfrak{M}$ crecen, disminuyendo $(\mathfrak{K}_0/\mathfrak{K})^2$ y $(\mathfrak{M}_c/\mathfrak{M})^2$; por tanto,

$$\lim \left(\frac{1 - [\mathfrak{K}_0/\mathfrak{K}]^2}{1 - [\mathfrak{M}_c/\mathfrak{M}]^2} \right)_{y=\infty} = 1$$

y

$$\lim (dy/dx)_{y=\infty} = s_0$$





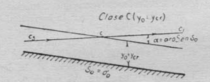


FIG. 62.—Formas generales de los diferentes tipos de curvas de lámina libre.

que corresponde a una línea horizontal que forma un ángulo α_0 (sen $\alpha_0 = s_0$) con el fondo.

30. FORMA DE LAS CURVAS.—Las propiedades de las curvas, establecidas en Ec. [66], unidas al signo de dy/dx (tabulado en la Ec. [65]), determinan el aspecto de cada tipo particular de curva. En la figura 62 se da un resumen. A continuación pasamos una revista rápida a las distintas clases de curvas, parando especial atención en los casos interesantes, en la práctica, que cada tipo ofrece.

1.ª *Clase M. Corrientes de pendiente suave*; $y_0 > y_{cr}$. *Tipo* M_1. Curva cóncava ascendente, tangente superiormente a la línea de calado normal y a una horizontal 0. Esta curva es el tipo más importante en la práctica. Se produce en el caso de un remanso en un cauce natural de pendiente suave (fig. 3), en un canal (fig. 2 *b*), etc. (Véase *AB'* en la fig. 4 y trayecto 3-4 en la fig. 11.)

Tipo M_2. Curva convexa descendente, tangente inferiormente a la línea de calado normal, que termina en una depresión hidráulica en las proximidades de *C*. (Véase figura 9: *Ac*; fig. 11: 5-6; fig. 2*c*, y fig. 4: *AB"*.)

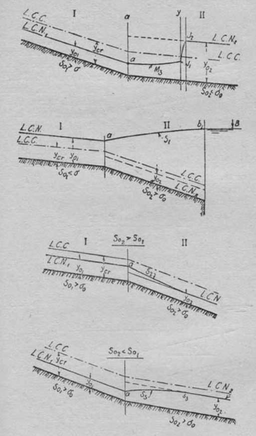
Tipo M_3. Curva cóncava ascendente. Este tipo se produce cuando la corriente, en estado muy rápido, penetra en un cauce de pendiente suave. Tiene lugar en el desagüe de una compuerta (fig. 11: 1-2), al pie de un vertedero (fig. 8); otro caso en que se produce es (fig. 63) en el cambio brusco de pendiente fuerte ($s_{01} > \sigma$) a suave ($s_{02} < \sigma$). La curva M_3 se encuentra entre el punto anguloso *a* y el pie de resalto j_1.

2.ª *Clase S. Corrientes de pendiente fuerte*; $y_0 < y_{cr}$. *Tipo* S_1. Curva ascendente convexa, que comienza con un resalto y es tangente inferiormente a la horizontal 0-0. Ver figura 6: 2-*A*, figura 46 y figura 64: *a-b*, que representa un cauce sumergido con pendiente fuerte.

Tipo S_2. Curva descendente cóncava, en general relativamente corta, más bien es una transición de la depresión hidráulica al régimen uniforme. V. figura 9: *cB* y figura 11 después del perfil 7. Otro caso es la figura 65, donde se presenta un punto anguloso con cambio de pendiente fuerte a fuerte, siendo s_{02} mayor que s_{01}.

Tipo S_3. Curva ascendente convexa, también del tipo de transición, entre una corriente muy rápida y la línea de

calado uniforme, a la cual la curva es tangente inferiormen-



FIGS. 63-66.—Régimen en un canal con un cambio brusco de pendiente.

te. Otro ejemplo es la figura 67, donde el régimen a continuación de una compuerta con calado d_1 en la *vena contrac-*

ta continúa rápido en un canal de pendiente fuerte cuyo calado normal y_0 es $>d_1$.

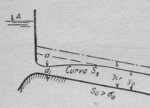


FIG. 67.—Ejemplo de una curva de lámina libre del tipo S_3.

3.ª *Clase C. Corrientes de pendiente crítica*; $y_0=y_{cr}$. Al ser la pendiente del fondo $s_0=\sigma_0$, este caso es intermedio entre la Clase *M* y la Clase *S*. Naturalmente, la curva C_1 será intermedia entre la cóncava M_1 y la convexa S_1; y C_3, intermedia entre la cóncava M_3 y la convexa S_3. Estas formas intermedias sólo pueden ser la línea recta.

La ecuación del régimen variado [46], al ser $s_0=\sigma_0$, se convierte en este caso en

$$\frac{dy}{dx}=s_0\frac{1-(\mathfrak{K}_0/\mathfrak{K})^2}{1-\frac{\sigma_0}{\sigma}\,\frac{\mathfrak{K}_0}{\mathfrak{K}}^2}$$

Para $y=y_0$, $\sigma_0/\sigma=1$. Para $y>y_0$, σ_0/σ es, por lo general, ligeramente >1. Para $y<y_0$, lo contrario. En todo caso la

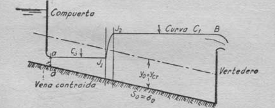


FIG. 68.—Curvas de lámina libre del tipo *C*.

desviación de la unidad de σ_0/σ no es, generalmente, sustancial. Siendo $\sigma_0/\sigma=1$, resulta

$$dy/dx=s_0, \qquad [67]$$

lo que representa una línea *horizontal* que corta la línea $y_0=y_{cr}$ bajo el ángulo $\alpha=\text{arc sen}\, s_0$. En la figura 68 se da un ejemplo de curvas C. Una línea horizontal C_3 enlaza la *vena contracta* con el pie del resalto j_1; por otro lado, una línea horizontal C_1 enlaza el extremo del resalto j_2 con

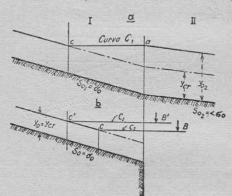


FIG. 69.—Ejemplos de curvas de lámina libre C_1.

el nivel superior del vertedero B. Otros ejemplos de líneas C se representan en la figura 69, en que una corriente en estado crítico penetra en un canal de pendiente suave.

En este último caso el punto de intersección de la línea horizontal C con las líneas de calado normal y_0 parece ofrecer una discontinuidad en los puntos a y c. Hay una aparente contradicción en el hecho de que en el punto de unión, donde y es simultáneamente igual a y_0 e y_{cr}, la curva debiera ser simultáneamente perpendicular y tangente a la línea $y_0=y_{cr}$, que proviene de la indeterminación analítica de dy/dx, que, según la Ec. [44], para $y=y_0=y_c$ se hace

$$dy/dx={}^0/_0$$

Sin embargo, la esencia física del fenómeno puede aclarar esto siguiendo la formación del punto de unión c de la figura 69, considerando la evolución de un caso de movi-

miento como el representado en la figura 68. Efectivamente: supongamos que el nivel B descendiera gradualmente. Al pasar por las posiciones B', B'', B''', etc. (fig. 70), retrocede el resalto a las posiciones j'_1, j''_1, j'''_1, etc., reduciéndose

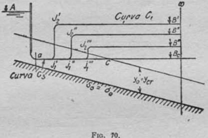


Fig. 70.

dose su altura. La distancia vertical entre las líneas C_1 y C_3 se va haciendo cada vez menor, hasta que al confundirse B con Bc, ambas líneas coincidirán, haciéndose el resalto *infinitamente pequeño*. El punto de intersección c de la figura 69 corresponde, por tanto, al caso límite de un resalto de *altura infinitamente pequeña*.

CAPITULO VIII

INTEGRACION DE LA ECUACION DEL REGIMEN VARIADO

31. Introducción. Reseña histórica.—Separando variables en la Ec. [48] se obtiene:

$$s_0\, dx = \frac{1-\beta(\mathfrak{K}_0/\mathfrak{K})^2}{1-(\mathfrak{K}_0/\mathfrak{K})^2}\, dy = dy + (1-\beta)\frac{dy}{(\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_0)^2-1} \qquad [68]$$

la longitud del arco $l_{2,1}=x_2-x_1$ (fig. 71) entre dos secciones, cuyos calados son, respectivamente, y_2 e y_1, es:

$$l_{2,1} = x_2 - x_1 = \frac{1}{s_0}\left[(y_2 - y_1) + \int_{y_1}^{y_2} \frac{(1-\beta)\, dy}{(\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_0)^2 - 1}\right] \qquad [69]$$

Conocidos los elementos del régimen, la expresión bajo el signo integral

$$\frac{1-\beta}{(\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_0)^2-1}$$

es, según los artículos 21 y 22, función solamente de y, pudiendo representarse por $\theta(y)$. Puede dibujarse la curva determinando cuantos puntos se precisen (fig. 72). El valor de la integral $\int_{y_1}^{y_2} \theta(y)\, dy$ es el área rayada en la figura 72; puede determinarse su valor numérico por cualquiera de los procedimientos corrientes de integración, analítica o gráfica. Conocido el valor de la integral, por la Ec. [69] se determina la longitud $l_{1,2}=x_2-x_1$. Este método es general y puede aplicarse sin limitaciones.

Fig. 71.—Longitud de un trayecto $l_{2,1}$ entre los límites de integración y_2 e y_1.

Pero, por otra parte, la integración aproximada, bien gráfica, bien analítica, es siempre engorrosa y, con razón, antipática. Es natural que desde los primeros tiempos se haya intentado reducir a algún procedimiento analítico simple la labor del cálculo de las superficies libres. Desde Dupuit (1848), el método preferido ha sido el de sustituir la sección dada por otra «ideal» de forma sencilla que, con otras hipótesis simplistas, redujese la integración del régimen variado a una cuadratura. Dupuit, y posteriormente Rühlmann y Bresse, tomaron como sección ideal la rectangular de gran ancho (figura 73). Por otra parte, Tolkmitt, que se interesó especialmente por las corrientes naturales, eligió el perfil parabólico. Los citados autores suponen, además, un valor constante del coeficiente de rozamiento C de Chézy, para todo valor del calado. Se han confeccionado tablas especiales que facilitan los cálculos dando el valor de la cuadratura en cuestión.

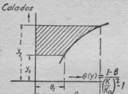


FIG. 72.—Representación gráfica de la integral $\int_{y_1}^{y_2} \theta(y)\,dy$

El mayor defecto de estos métodos estriba, evidente-

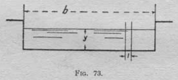


FIG. 73.

mente, en que las secciones ideales tienen poco de común con las que el ingeniero encuentra en la práctica. Además, no hay medio de apreciar el grado de aproximación y error inherentes al método.

Hacia 1912, el autor, inspirado en general por los trabajos de Bresse y Tolkmitt, ideó un método que ofrece una precisión mucho mayor y estima la magnitud y carácter de los posibles errores.

32. El exponente hidráulico.—El método sugerido por el autor se basa en el hecho, empíricamente establecido, de que la función $\mathfrak{K}=aC\sqrt{R}$, para calados comprendidos en un entorno razonable, se aproxima suficientemente a las relaciones

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{K}^2(y)=a^2C^2R=\text{const } y^n \\ (\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_0)^2=a^2C^2R/a_0{}^2C_0{}^2R_0=(y/y_0)^n\end{aligned}\right\} \qquad [70]$$

Al exponente n lo llamaremos *exponente hidráulico*. Evidentemente es otra característica de la sección, que debe añadirse a las resumidas en el artículo 21. La Ec. [70] es más aproximada para unas secciones que para otras, pero en la comprobación de la misma realizada con secciones de las más variadas formas se ha obtenido un grado de aceptación notable.

Fig. 74.

Para determinar el valor de n dibujamos $\mathfrak{K}=aC\sqrt{R}$ en escala logarítmica. Dibujando una línea recta (fig. 75) se obtiene el valor del exponente como duplo del valor de tg α. En la lámina II se incluyen ejemplos para una serie de secciones de canales.

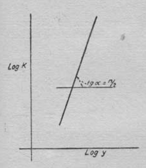


Fig. 75. — Representación logarítmica de la curva de coeficiente de gasto.

Las rectas dibujadas en la lámina II dan el valor medio de n para la sección correspondiente. En la mayoría de los casos prácticos hay que determinar la curva de lámina libre solamente para un número limitado de valores del calado.

De la Ec. [70] se tiene, para cualquier calado:

$$n=2\frac{\text{Log}\,(\mathfrak{K}\,[y]/\mathfrak{K}\,[y_0])}{\text{Log}\,(y/y_0)} \qquad [71]$$

Aplicando la Ec. [71] a los calados límites y_a e y_b se obtienen los valores límites n_a y n_b. Generalmente será suficientemente aproximado suponer un valor medio. Si se exigiera gran precisión, podría subdividirse el margen de variación del calado, cosa que, como la práctica enseña, es pocas veces necesaria. Puede demostrarse fácilmente que los casos tratados por Bresse y Tolkmitt constituyen casos particulares de la Ec. [70], correspondientes, respectivamente, a los valores 3 y 4 del exponente hidráulico.

Sección rectangular de gran anchura (Bresse).—Se aplica esta denominación a las secciones en que el ancho es suficientemente grande al lado del calado para que el radio hidráulico

$$R = \frac{a}{p} = \frac{by}{b+2y} = y\left(1 - \frac{2y}{b+2y}\right) \simeq y.$$

Suponiendo, además, un valor constante para el coeficiente de rozamiento C, se tiene:

$$\mathfrak{K} = aC\sqrt{R} = \text{const} \cdot y^{3/2}$$

de donde

$$(\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_0)^2 = (y/y_0)^3 \; ; \; n = 3 \qquad [72]$$

Sección parabólica (Tolkmitt).—Suponiendo en una sección parabólica (fig. 74) el ancho suficientemente grande al lado del calado, de forma que $p \simeq b$, se tiene:

$b = \text{const}\ \sqrt{y}$; $a = {}^2/_3 b \cdot y = \text{const} \cdot y^{3/2}$;

$R = a/p \simeq y$; admitiendo un valor constante para C,

$$\mathfrak{K} = \text{const} \cdot y^2$$

de donde

$$(\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_0)^2 = (y/y_0)^4 \; ; \; n = 4 \qquad [73]$$

Corrección para el caso de coeficiente de rozamiento C variable.—En este caso lo mejor es emplear una expresión exponencial de C, tal como

$$C = C_0 R^p, \qquad [74]$$

por ejemplo, la dada por Manning:

$$C = C_0 R^{1/6} = \frac{1}{n} R^{1/6} \qquad [75]$$

donde $1/n$ es el coeficiente inverso de Ganguillet-Kutter.

Parece, sin embargo, que puede conseguirse una mejor adaptación a los resultados experimentales empleando en lugar de un coeficiente constante, como hace Manning, uno variable, creciente con la rugosidad de las paredes. El valor de p para canales en tierra o en gravilla se ha hallado que oscila entre 0,20 y 0,25. Si en lugar de la constante C se tomara en las ecuaciones de Bresse y Tolkmitt el valor

$$C = C_0 R^{0,25}$$

Fig. 76.

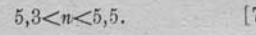
el exponente hidráulico en lugar de $n=3$ y $n=4$ valdría, respectivamente, $n=3,5$ y $n=4,5$. Estos corresponden a la solución propuesta por Schaffernack (1).

Canales trapeciales. Valores límites de n.—En el caso de los canales trapeciales el valor de n está comprendido entre 3 y 4. La curva correspondiente será, por tanto, intermedia entre las obtenidas empleando las Tablas de Bresse y Tolkmitt.

El *mayor valor de n* es el correspondiente a una sección triangular (fig. 76). Siendo semejantes los elementos geométricos, el área es proporcional a y^2, y p y R a y, lo que hace que $\mathfrak{K} = \text{const}\ C \cdot y^{5/2}$ o, según la Ec. [74],

$$\mathfrak{K}^2 = \text{const}\ y^{5+2p}. \qquad [76]$$

Con un valor del exponente p variable entre 0,15 y 0,25 el exponente hidráulico oscilará, para la sección triangular, entre



$$5,3 < n < 5,5. \qquad [77]$$

El *menor valor de n* corresponde al caso de una sección rectangular muy estrecha (fig. 77) en relación con su calado. En tal caso se tiene, aproximadamente:

Fig. 77.

(1) V. Apéndice I.

$$p = 2y + b = 2y\left(1 + \frac{b}{2y}\right) \simeq 2y;$$

$$R = \frac{by}{2y} \simeq \frac{b}{2} = \text{const},$$

siendo R constante, C también lo es, y por tanto:

$$\mathfrak{K} = \text{const}\, y\;;\; n = 2. \qquad [78]$$

Por consiguiente, los valores extremos de n son 2 y 5,5. Estos raramente intervienen en la práctica. Un canal hondo

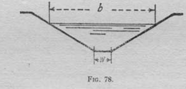


FIG. 78.

con cajeros verticales tendrá un valor de n próximo a 3, mientras que un canal trapecial, en que el ancho del fondo es pequeño al lado del calado, dará $n=4,5$ o superior.

33. Tablas de la función del régimen variado.— Como

$$(\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_0)^2 = (y/y_0)^n$$

la Ec. [68] se convierte en:

$$s_0\, dx = dy + (1 - \beta)\frac{dy}{(y/y_0)^n - 1} \qquad [79]$$

Designando por

$$y/y_0 = \eta\;;\; dy = y_0 d\eta \qquad [80]$$

se obtiene:

$$dx = \frac{y_0}{s_0}\left[d\eta + (1 - \beta)\frac{d\eta}{\eta^n - 1}\right] \qquad [81]$$

Como se ha indicado anteriormente, el valor de $\beta = s_0/\sigma$ no varía sustancialmente y, además, la variación es gradual y lenta, de forma que se puede subdividir el intervalo de integración en otros parciales en los que se tomará un valor

medio de $1-\beta$ y de esta forma considerar dicho factor como una constante de integración.

Suponiendo ahora, en relación con la figura 71, que los calados y_1 e y_2 permanecen dentro de un intervalo en el que pueda aceptarse $1-\beta$ con el valor constante prefijado, e integrando la Ec. [81] entre los límites y_2 e y_1, la longitud del arco $l_{2,1}$ será:

$$l_{2,1} = x_2 - x_1 = \frac{y_0}{s_0}\left[(\eta_2 - \eta_1) + (1-\beta)\int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{d\eta}{\eta^n - 1}\right] \quad [82]$$

En esta ecuación, de acuerdo con la Ec. [80], los límites de integración se sustituyen por $\eta_1 = y_1/y_0$; $\eta_2 = y_2/y_0$.

El problema queda reducido a una *cuadratura*. Designando el valor de la integral

$$\int_0^{\eta} \frac{d\eta}{\eta^n - 1} = \text{const} - B(\eta) \quad [83]$$

y suponiendo que se conocen los valores de $B(\eta)$ para los diferentes valores de η, se tiene:

$$x_2 - x_1 = l_{2,1} = \frac{y_0}{s_0}\left[(\eta_2 - \eta_1) - (1-\beta)\left(\beta(\eta_2) - \beta(\eta_1)\right)\right] \quad [84]$$

Haciendo:

$$\eta - (1-\beta)B(\eta) = \Pi(\eta), \quad [85]$$

la Ec. [84] puede ponerse en la forma:

$$x_2 - x_1 = l_{2,1} = \frac{y_0}{s_0}\left[\Pi(\eta_2) - \Pi(\eta_1)\right] \quad [86]$$

Al final del libro se dan los valores de $B(\eta)$, calculados por desarrollo en serie, correspondientes a los valores usuales de η, lo que permite hacer aplicables a la práctica las ecuaciones [84] y [86]. En el cálculo de los valores de $B(\eta)$ se ha supuesto igual a cero la constante de integración, de forma que las tablas dan el valor numérico de

$$B(\eta) = -\int_0^{\eta} \frac{d\eta}{\eta^n - 1} \quad [87]$$

A la función $B(\eta)$ la llamaremos *función del régimen variado*. Se han calculado los valores de $B(\eta)$ para una serie de valores de n desde 2,8 a 4,2 (que son los más importantes),

con intervalos de 0,2. Para valores superiores a 4,2 se ha supuesto un intervalo mayor. Cuando el exponente correspondiente a un caso particular caiga entre dos valores tabulados, puede procederse por interpolación rectilínea (1).

EJEMPLO 7.°

El propósito de este ejemplo es familiarizar al lector con el empleo de las *tablas de la función del régimen variado*, así como con la técnica general de las investigaciones en régimen variado. Se da, como caso más sencillo, un canal rectangular de gran ancho (fig. 73).

La pendiente (fig. 79) es $s_0 = 4$ $^{00}/_{00}$; se toma un coeficiente de rugosidad G. K., $n = 0{,}025$. El régimen uniforme

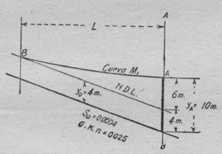


FIG. 79.—Esquema del canal del Ejemplo 7.° El extremo de la curva en el punto B corresponde a $\eta = 1{,}001$ ó $1{,}01$ η_0.

se establece normalmente con un calado $y_0 = 4$ m. para un caudal

$$q = C_0 y_0^{3/2} \sqrt{s_0} = 50{,}058 \cdot 4^{3/2} \cdot 2 \cdot 10^{-2} = 8{,}009 \text{ m}^3/\text{seg}.$$

Se supone, además, que en A se sobreeleva el nivel en $z = 6$ m., lo que hace que $y_a = 10$ m.

Cuestión 1.ª Determinar y dibujar la curva de remanso.

Primeramente hay que establecer el tipo de régimen.

(1) En el Apéndice II se expone el método seguido para el cálculo de los valores de $B(\eta)$.

Uno de los parámetros $y_0=4$ m. es un dato. El otro, el calado crítico, vale:

$$y_{cr}=\sqrt[3]{q^2/g}=\sqrt[3]{8{,}009^2/9{,}81}=1{,}87 \text{ m.}$$

Como $y_0=4>y_{cr}$, el régimen es de clase M. Como $y_a>y_0$, la curva es del tipo M_1—curva de remanso en canal de pendiente suave.

Aplicando la Ec. [84] se determina:

a) El valor del exponente n.

b) La curva $1-\beta$.

Exponente n.—Para un ancho unidad, con $R \simeq y$ $\mathfrak{K}=C \cdot y^{3/2}$, de donde se tiene

TABLA VI

y	1 m.	1,5 m.	2 m.	3 m.	4 m.	6 m.	10 m.
C	40,000	43,187	45,333	48,184	50,058	52,477	55,155
$\mathfrak{K}$	40,000	79,356	128,202	250,346	400,464	771,097	1744,001

Las curvas logarítmicas (canal tipo E, láminas I y II) dan: $\operatorname{tg}\alpha=1{,}62$ y $n=3{,}24$.

La curva $1-\beta$.—Para un canal de gran ancho, $p/b=1$, de donde la pendiente crítica (Ec. [43]) es, simplemente, $\sigma'=g/C^2$, los valores de la cual vienen dados en la figura 40. La pendiente crítica normal (σ para $y_0=4$ m.) es

$$\sigma_0=39\ {}^{00}/_{00}\ ;\ \beta_0=s_0/\sigma_0=4/39=0{,}102\ ;\ 1-\beta=0{,}898.$$

Para otros calados, $\beta=0{,}102\,\frac{\sigma_0}{\sigma}$, lo que da:

TABLA VII

y	1 m.	1,5 m.	2 m.	3 m.	4 m.	6 m.	10 m.
σ en ${}^{00}/_{00}$	61,312	52,598	47,735	42,253	39,149	35,623	32,248
σ_0/σ	0,638	0,744	0,820	0,926	1,000	1,099	1,214
$\beta=$	0,065	0,076	0,084	0,094	0,102	0,112	0,124
$1-\beta$	0,935	0,924	0,916	0,906	0,898	0,888	0,879

En la figura 80 se acompaña la curva $1-\beta$. Para proceder a la integración se ha dividido en tres intervalos la variación total del

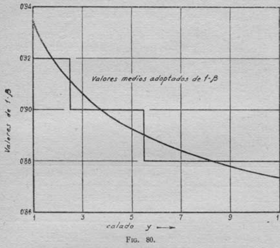


FIG. 80.

calado, considerándose un valor medio constante de $1-\beta$ en cada uno de ellos de 0,88, 0,90 y 0,92, respectivamente.

Límites de integración. Longitud de la curva.—El límite inferior es $y_a=10$. Para este límite $\eta_a=y_a/y_0=10/4=2,5$. El límite superior es el final de la curva de remanso. En sentido estricto, como la curva es asintótica, la longitud del remanso es infinita. En la práctica, sin embargo, se supone que termina en una cierta sección (*B* en la fig. 79), donde la sobreelevación debida al remanso es inferior a un cierto valor pequeño prefijado. Generalmente se fija esa diferencia en términos relativos; por ejemplo, 1 por 100 ó 0,01 por 100. Entonces el final de la curva se determina por $\eta=y_b/y_0=1,01$ o $\eta=1,001$, respectivamente.

Suponiendo, por ejemplo, $\eta=1,001$, se obtienen los límites de integración:

$$y_a=10 \text{ m.}\,;\quad \eta_a=10/4=2,5$$
$$\eta_b=1,001\,;\quad y_b=4,004$$

Método de integración.—El procedimiento consiste en subdividir el intervalo en otros parciales y determinar mediante la Ec. [84] o la [86] la longitud de curva correspondiente a cada intervalo.

Por ejemplo, en nuestro caso particular puede hacerse la subdivisión que se indica en la figura 81 para calados

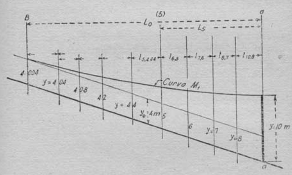


FIG. 81.—Descomposición del intervalo de calados en otros parciales.

sucesivos de $y = 10$ m., 8 m., 7 m., ... ; 4,08, 4,04 y, finalmente, 4,004.

NOTA.—Con la notación empleada se designa cada sección por el número que mide el calado correspondiente y la longitud entre dos secciones por $l_{n,m}$, correspondiendo el primer subíndice a la sección de aguas abajo.

Al aplicar las Ecs. [84] y [86] a un intervalo entre dos secciones de calados y_n e y_m (fig. 82) hay que recordar que la Ec. [82] se ha establecido con la hipótesis de la figura 71, es decir, que el calado designado por y_2 está situado *aguas abajo* del y_1. Según ello, en la figura 82, y_n con $\eta_n = y_n/y_0$ será el límite superior, e y_m con $\eta_m = y_m/y_0$ el inferior de la integral. Por tanto, en las Ecs. [84] y [86] y_n corresponde a y_2, e y_m a y_1.

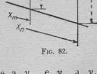


FIG. 82.

Recordando esta sencilla regla pueden emplearse las *tablas de la función del régimen variado* y hacerse los cálculos de una manera puramente algebraica.

Si la denominación de los calados se hace correctamente, como en la figura 82, la distancia $l_{n,m}$ resultará en la Ec. [84] *positiva*.

Si resultase negativa, indicaría ello algún error de designación, es decir, que y_m debería caer aguas abajo de y_n.

Sumando las distancias parciales sucesivas a partir de la sección inicial, se obtiene, para cualquier sección m, la distancia total L_m; así, por ejemplo, L_5 indica la longitud total desde la sección a a la 5 (fig. 81).

La longitud desde la sección inicial al final de la curva la designaremos por L_0.

Volviendo a nuestro ejemplo, determinemos $l_{10,8}$.

Ya se ha calculado el exponente $n=3{,}2$.

Refiriéndonos a la figura 71, se tiene:

$$y_2=10 \text{ m.}; \quad \eta_2={}^{10}/_4=2{,}5; \quad B(2{,}5)=0{,}062$$

$$y_1=8 \text{ m.}; \quad \eta_1={}^{8}/_4=2{,}0; \quad B(2{,}0)=0{,}104$$

Para el intervalo 10-8 el valor de 1-β, por la figura 80, es 0,88. Además $y_0/s_0=4/4\cdot 10^{-4}=10\,0000$ m. Aplicando la Ec. [84]

$$l_{10,8}=10\,000\,[(2{,}5-2)-0{,}88\,(0{,}062-0{,}104)]=$$

$$=10\,000\,[0{,}5+0{,}037]=5\,370 \text{ m}.$$

Repitiendo el procedimiento para los otros intervalos, se tiene:

TABLA VIII

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
y	$\eta = y/y_0$	$\beta(\eta)$ con $n=3,4$	$1-\beta$	$\Delta\eta$	$\Delta B(\eta)$	$-(1-\beta)\,\Delta B$	$\Delta\pi$	l	L
10,000	2,500	0,062	0,880						0
				0,500	− 0,042	+ 0.037	0,537	5 370	
8,000	2,000	0,106	0,880						5 370
				0,250	0,039	0,034	0,284	2 840	
7,000	1,750	0,143	0,890						8 210
				0,250	0,068	0.060	0,810	3 100	
6,000	1,500	0,211	0,890						11 310
				0,250	0,150	0.133	0,383	3 830	
5,000	1,250	0,361	0,896						15 140
				0,150	0,240	0,215	0,365	3 650	
4,400	1,100	0,601	0,896						18 790
				0,050	0,201	0,180	0,230	2 300	
4,200	1,050	0,802	0,896						21 090
				0,030	0,276	0,247	0,277	2 770	
4,080	1,020	1,078	0,896						23 860
				0,010	0,213	0.190	0,200	2 000	
4,040	1,010	1,291	0,896						25 860
				0,009	0,717	0,642	0,651	6 510	
4,004	1,001	2,008							32 370

En la figura 83 se dibuja la curva de remanso resultante.

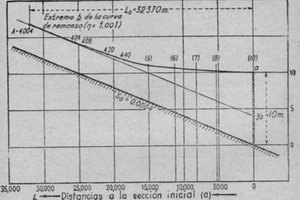


FIG. 83.—Trazado de la curva de remanso del tipo M_1 correspondiente al Ejemplo 7.°; Cuestión 1.°

Cuestión 2.ª Determinar el calado y a la distancia $L = 12\,000$ m. de la sección a.

Este problema es el inverso del tratado en la Cuestión 1.ª Aquí son datos L e y_2 (fig. 84), lo que supone conocer $\Pi_2 = \eta_2 - (1-\beta) B(\eta_2)$ (Ec. [86]). La solución está en determinar el valor particular de η_1, que en

$$\Pi_1 = \eta_1 - (1-\beta) B(\eta_1)$$

satisfaga la ecuación

$$\Pi_1 = \Pi_2 - L \frac{s_0}{y_0} \qquad [88]$$

Fig. 84.—Determinación del calado de una sección dada.

Aplicando la Ec. [88] se tendría la certeza de operar en un intervalo donde $1-\beta$ es una constante de integración.

Así, en nuestro caso, sabiendo que $L_6 = 11\,310$ m., bastará hacer $y_2 = 6$ m. y determinar el calado en una sección (fig. 85), situada a una distancia $l = 12\,000 - 11\,310 = 690$ m. delante de la sección 6.

Con $y_2 = 6$ m.:

$$\Pi_2 = \Pi(1{,}5) = 1{,}5 - 0{,}89 \times 0{,}177 = 1{,}343$$

y

$$\Pi(\eta_2) - L \frac{s_0}{y_0} = 1{,}343 - 690 \cdot \frac{4 \cdot 10^{-4}}{4} = 1{,}274.$$

Todo estriba en determinar el valor de η que cumpla

$$\Pi(\eta_1) = \eta_1 - 0{,}89\, B(\eta_1) = 1{,}274,$$

lo cual puede hacerse por tanteos, con las tablas para $n = 3{,}2$:

η_1	$B(\eta_1)$	$\Pi_1 = \eta_1 - 0{,}89\, B(\eta_1)$
1,46	0,227	1,258
1,48	0,219	1,285

Fig. 85.

En la figura 86 se dibuja la curva de valores de $B(\eta_1)$. Gráficamente se obtiene el valor de η que hace $\Pi(\eta)=1{,}274$; $\eta=1{,}472$, de donde $y_1=\eta_1 y_0=1{,}472\times4=5{,}888$ m. Por la forma de la curva $\Pi(\eta)$ (figura 86) se ve que es muy aproximada la interpolación rectilínea.

34. SOLUCIÓN ABREVIADA. LA CURVA $\beta=0$.—Ya Dupuit indicó que en corrientes lentas el valor de $v^2/2g$ (Ec. [17]) es pequeño, y por consiguiente, en curvas de remanso puede despreciarse el efecto de la energía cinética.

En efecto: en el ejemplo precedente el valor primitivo de la velocidad en régimen uniforme $v_0=8{,}009/4 \doteq 2{,}002$ m/sg. se reduce a $v_a=8{,}009/10=0{,}801$ m/sg. en la sección a, resultando un descenso de la altura cinética de

$$\frac{2{,}002^2-0{,}801^2}{2g}=0{,}171 \text{ m}.$$

Además hay que tener en cuenta ciertas circunstancias físicas que caracterizan el régimen retardado en general. Como ya se ha indicado anteriormente, el régimen retardado se caracteriza por un incremento de la turbulencia, resultando que sólo una parte, a menudo insignificante, de la energía cinética que teóricamente se libera por la disminución de velocidad, se convierte en potencial. En todo caso la conversión de energía cinética en potencial sobre un largo trayecto de un canal amplio es desconocida. Por otra parte, como se verá más adelante, la idea de Dupuit introduce una simplificación notable.

FIG. 86.

Con referencia a las Ecs. [84] y [86] la omisión del efecto de la variación de la energía cinética equivale a hacer $\beta=0$, o en otros términos: despreciando en la Ec. [17] el término $\frac{d}{dx}\left(\frac{v^2}{2g}\right)$ se anula β en el paréntesis $1-\beta$, quedando la ecuación simplificada

$$l_{2,1}=x_2-x_1=\frac{y_0}{s_0}\left[(\eta_2-\eta_1)-(B(\eta_2)-B(\eta_1))\right] \qquad [89]$$

Designando por

$$\eta - B(\eta) = \Phi(\eta) \qquad [90]$$

se tiene:

$$l_{2.1} = x_2 - x_1 = \frac{y_0}{s_0}\,[\Phi(\eta_2) - \Phi(\eta_1)] \qquad [91]$$

Para facilitar las operaciones se han calculado las tablas de $\Phi(\eta)$ para valores de n desde 2,8 a 4,2. A las curvas que obtengamos por este método las denominaremos curvas $\beta = 0$.

Entre todos los tipos posibles de curvas, la curva M_1 es la más frecuente en la práctica del ingeniero. En la mayoría de los casos en que se trata de curvas M_1 es recomendable y está plenamente justificado el cálculo abreviado expuesto, particularmente teniendo en cuenta que casi siempre opera en el sentido de la seguridad dando longitudes mayores.

Se comprende claramente, por otra parte, que este método abreviado es *solamente* aplicable a las curvas M_1. En las curvas descendentes, M_2 ó S_2, la altura dinámica aumenta en el sentido de la corriente a expensas de la energía potencial. En relación con los otros tipos de curvas (1) y^+ hay que tener en cuenta que la recuperación de la energía potencial juega un papel decisivo en la forma particular de tales curvas. Por ello las curvas S_1 ofrecen forma *convexa* debida a la restitución de energía cinética, y las curvas M_3 y S_3 se explican como debidas a un descenso rápido de la energía cinética partiendo de un régimen en estado de intenso movimiento.

Aun en el caso de curvas M_1 el método abreviado sólo puede emplearse cuando la «cineticidad», expresada por el factor correspondiente, es poco elevada. El factor cinético se refleja en el valor de β. Por ello, cuando $y_0 = y_{cr}$, es decir, cuando el régimen normal es crítico, $s_0 = \sigma_0$ y $\beta_0 = 1$.

(1) Se ha exagerado la importancia de las investigaciones experimentales encaminadas a descubrir el proceso de la restitución de la energía cinética en corrientes divergentes. Es más importante obtener un valor comparativo de las pérdidas por rozamiento en los regímenes lento y rápido.

Un canal de pendiente suave se caracteriza por $\beta_0<1$ y $1>1-\beta>0$. Por el contrario, un canal o corriente de pendiente fuerte cumple $\beta_0>1$ y $(1-\beta)$ negativo. Además, en pendientes fuertes $1-\beta$ puede ser grande en valor absoluto.

Es preciso, por tanto, que, previamente, pondere el ingeniero proyectista cuándo y hasta dónde es aplicable el método abreviado.

EJEMPLO 8.°

Suponiendo el mismo caso del ejemplo 7.°:

Cuestión 1.ª Determinar y dibujar una curva de remanso $\beta=0$.

Los cálculos, según la Ec. [91], se resumen en la Tabla IX.

TABLA IX

y	η	$\Phi(\eta)$ $n=3,2$	$\Delta\Phi$	l	L
10,000	2,500	2,438	....	....	0
			0,542	5 420	
8,000	2,000	1,896	....	....	5 420
			0,289	2 890	
7,000	1,750	1,607	....	....	8 310
			0,318	3 180	
6,000	1,500	1,289	....	....	11 490
			0,400	4 000	
5,000	1,250	0,889	....	....	15 490
			0,390	3 900	
4,400	1,100	0,499	....	....	19 390
			0,251	2 510	
4,200	1,050	0,248	....	....	21 900
			0,306	3 060	
4,080	1,020	— 0,058	....	....	24 960
			0,223	2 230	
4,040	1,010	0,281	....	....	27 190
			0,726	7 260	
4,004	1,001	1,007	....	....	34 450

NOTA: Para $\eta=1,01$ e inferiores, el valor de $\Phi(\eta)$ es negativo. Téngase siempre presente que los cálculos han de llevarse de una manera estrictamente algebraica.

La curva se aproxima tanto a la de la figura 83, que sería difícil dibujarla sin que hubiera confusión entre ambas. La longitud de la curva $\beta=0$ es alrededor de un 6 por 100 superior a la calculada en la Tabla VIII.

Cuestión 2.ª En la anterior curva $\beta=0$, determinar el calado a la distancia de 12 000 m. de la sección inicial.

En este caso, análogo a la Cuestión 2.ª del Ejemplo 7.°, es donde encuentra particular ventaja el empleo del método abreviado. En primer lugar, siendo $\beta=0$, no hay que preocuparse de los límites de los intervalos en los que $1-\beta$ sea constante de integración. Aplicando la Ec. [91], se tiene:

$$y_2=y_0=10 \text{ m.}; \quad \eta_2=2{,}5; \quad \Phi(2{,}5)=2{,}438;$$

la solución está en determinar el valor de η_1 que satisfaga la relación

$$\Phi(\eta_1)=\Phi(\eta_2)-L\frac{s_0}{y_0} \qquad [92]$$

En nuestro caso se tiene:

$$\Phi(\eta_1)=2{,}438-\frac{12\,000}{10\,000}=1{,}238.$$

Con las tablas, para $n=3{,}2$, se tienen los valores:

$$\eta=1{,}46; \qquad \Phi=1{,}233$$
$$\eta=1{,}48; \qquad \Phi=1{,}261$$

y por interpolación rectilínea

$$\eta_1=1{,}46+\frac{1{,}238-1{,}233}{1{,}261-1{,}233}\cdot(1{,}48-1{,}46)=1{,}463.$$

El calado buscado es

$$y_1=1{,}463\times 4=5{,}852 \text{ m.}$$

Comparado con el resultado 5,888 de la Cuestión 2.ª del Ejemplo 7.° se ve que el error, por exceso, es de un 0,6 por 100.

35. Exponentes intermedios.—En los Ejemplos 7.° y 8.° se ha manejado el valor del exponente $n=3{,}2$ correspondiente a una de las columnas de la lámina II. Naturalmente que éste no es el caso más frecuente. Aun para el canal en cuestión, si se deseara un valor más preciso de n, por ejemplo para el intervalo entre los calados $y_0=4$ m. e $y_n=10$ m. la Ec. [71] daría

$$n=2\frac{\text{Lg}(\mathfrak{K}_{10}/\mathfrak{K}_4)}{\text{Lg}\,10/4}=2\frac{\text{Lg}(1\,744/400)}{\text{Lg}\,2{,}5}=3{,}24$$

Para este valor de n, que no coincide con ninguno de entrada de la tabla, puede recurrirse a la interpolación.

Para tener una idea del grado de precisión que se alcanza, compararemos primeramente las soluciones correspondientes a los valores $n=3{,}4$ y $n=3{,}2$ que limitan al nuestro.

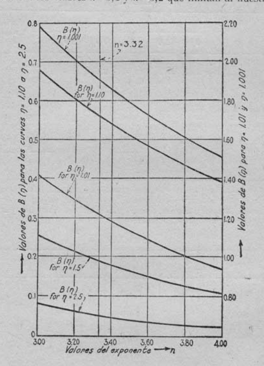


FIG. 87.—Ilustración del efecto del exponente hidráulico sobre los valores de $B(\eta)$.

Empleando una curva $\beta=0$ y limitando la comparación a pocos puntos característicos, se obtiene el resultado que se detalla en la Tabla X.

La última columna arroja la diferencia relativa de distancias L. Evidentemente, en una primera aproximación aceptando cualquiera de los exponentes 3,4 ó 3,2, el error no sobrepasa del 3 por 100.

TABLA X

y	η	$n = 3{,}2$			$n = 3{,}4$			Diferencia por ciento
		$\Phi(\eta)$	$\Delta\Phi$	l	$\Phi(\eta)$	$\Delta\Phi$	l	
10,000	2,500	2,438	......	......	2,453			
			1,149	11 490	......	1,130	11 300	1,8
6,000	1,500	1,289	......	......	1,323			
			0,789	7 890	......	0,759	7 590	3,9
4,400	1,100	0,499	......	......	0,564			
		—	0,780	7 800	—	0,736	7 360	5,8
4,040	1,010	0,281	......	......	0,172			
		—	0,726	7 260	—	0,683	6 830	6,1
4,004	1,001	1,007	......	......	0,855			
				$L_0 = 34\,450$			$L_0 = 33\,080$	4,1

Interpolación gráfica.—En la figura 87 se han dibujado las curvas $B(\eta)$ para una serie de valores de η, en función del exponente n. Mediante ellas se puede determinar gráficamente el valor intermedio de $B(\eta)$ para $n=3{,}32$, resultando:

TABLA XI

y	η	$\Phi(\eta) =$ $n = 3{,}24$	$\Delta\Phi$	l
10,000	2,500	2,440		
			1,140	11 400
6,000	1,500	1,300		
			0,790	7 900
4,400	1,100	0,510		
		—	0,770	7 700
4,040	1,010	0,260		
		—	0,730	7 300
4,004	1,001	0,990		
			$L_0 =$	34 300

Interpolación aritmética o lineal.—Procediendo por interpolación lineal, se forma la siguiente tabla:

TABLA XII

y	η	$\Phi(\eta)$			Para $n = 3{,}24$	
		$n = 3{,}2$	$n = 3{,}8$	$n = 3{,}24$	$\Delta\Phi$	l
10,000	2,500	2,438	2,453	2,441		
					1,145	11,450
6,000	1,500	1,289	1,323	1,296		
					0,784	7,840
4,400	1,100	0,499	0,564	0,512		
					0,771	7,710
4,040	1,010	$\overline{0{,}281}$	$\overline{0{,}172}$	$\overline{0{,}259}$		
					0,718	7,180
4,004	1,001	$\overline{1{,}007}$	$\overline{0{,}855}$	$\overline{0{,}977}$		
						$L_0 = 34{,}180$

La diferencia entre las longitudes que dan las Tablas XI y XII es despreciable. El ejemplo confirma la regla sancionada por la experiencia de que la interpolación rectilínea es un método suficientemente aproximado en la mayoría de los casos que se presenten al ingeniero en la práctica.

CAPITULO IX

METODOS DE CALCULO

En este capítulo se ilustran con ejemplos los métodos de resolución de problemas relativos al régimen variado. Los casos que se presentan son de índole elemental, y han sido concebidos para familiarizar al lector con los diversos métodos: indican el camino a seguir para resolver de una manera aproximada cuestiones interesantes en la práctica, y sirven de introducción a problemas más complicados, que se tratan en la parte segunda del libro. A cada tipo de curva se le dedica atención por separado. Como observación preliminar puede ser útil, en cálculos sobre régimen variado, tener presente que *el caudal puede sustituirse por el calado normal equivalente.*

En un canal de sección y pendiente dados el caudal Q y el calado y_0 del régimen uniforme están ligados por las relaciones

$$Q = \mathfrak{K}(y_0)\sqrt{s_0}\,; \quad \mathfrak{K}(y_0) = Q/\sqrt{s_0}$$

Para una serie de caudales Q_1, Q_2, Q_3, ... se tiene una serie de calados de régimen uniforme y_{01}, y_{02}, y_{03}, ..., verificándose

$$\mathfrak{K}(y_{01}) = Q_1/\sqrt{s_0}\,; \quad \mathfrak{K}(y_{02}) = Q_2/\sqrt{s_0}\,; \quad \text{etc.}$$

Cuando se emplea un caudal Q_m para caracterizar el régimen en un canal, puede emplearse, para sustituirlo, el calado normal equivalente. Se encontrará en los ejemplos que siguen que no interviene en los cálculos el valor del caudal, que viene representado por el calado normal equivalente.

36. La curva M_1.—En este artículo aplicaremos el método simplificado, empleando la curva $\beta=0$ y las Ecs. [91] y [92].

EJEMPLO 9.°

Un canal, de tipo A (lámina III), comunica dos depósitos A y B (fig. 88/1) que distan $L=2$ Km.; $s_0=4^{00}/_{00}$; n(G.K.)$=0{,}025$; $Ls_0=0{,}80$ m.

El agua entra en el canal por una compuerta de regulación. La entrada en B no encuentra obstáculo alguno. El canal está dimensionado para transportar $Q=100$ m³/sg. en régimen uniforme, con $y_0=3$ m.

$$\mathfrak{K}_0=100/\sqrt{4}\cdot 10^{-2}=5\,000 \text{ m}^3/\text{sg.} \simeq 4\,940$$

(Véase Tabla de la lámina III)

Evidentemente, en régimen uniforme $y_1=y_2=3$ m.

Puede suponerse ahora que los calados y_1 e y_2 varían. Entonces el caudal $Q=100$ m³/sg. puede variar. El problema estribará en determinar, en cada caso, cómo la variación de y_1, y_2 ó Q, respectivamente, afecta a los restantes elementos del régimen.

En los cálculos que siguen, al emplear las tablas de la función del régimen variable se tomará como valor medio del exponente $n=3{,}6$.

Cuestión 1.ª Permaneciendo el caudal $Q=100$ m³/sg., cambia el nivel en B de modo que $y_2=5$ m. Determinar el calado y_1 en la sección 1.

Refiriéndonos a la figura 88/2, el régimen será variado con superficie curva del tipo M_1. El caudal está representado por el calado normal $y_0=3$ m. Las características en la sección 2 son datos:

$$\eta_2={}^5/_3=1{,}66\ ;\quad \Phi(\eta_2)=1{,}549.$$

El calado y en la sección 1 está relacionado con y_2 en la Ec. [92]

$$\Phi(\eta_1)=\Phi(\eta_2)-\frac{Ls_0}{y_0}=1{,}549-\frac{0{,}8}{3}=1{,}283$$

En las tablas de $\Phi(\eta)$ se busca el valor de η que hace $\Phi(\eta)=1{,}283$; $\eta=1{,}448$; de donde $y_1=1{,}448\times 3=4{,}344$ m.

Cuestión 2.ª Suponiendo que el caudal permanece constante igual a 100 m³/sg., mientras que el nivel en B varía

entre $y_2=3$ m. e $y_2=5$ m., calcular y dibujar la curva representativa de y_1 en función de y_2.

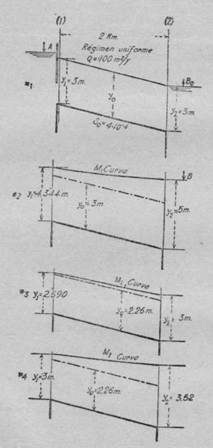


Fig. 88.—Figuras relativas al Ejemplo 9.°

Aplicando la cuestión primera a una serie de puntos, se tiene:

TABLA XIII

(1) y_2	(2) $\eta_2 = y_2/3$	(3) $\Phi(\eta_2)$	(4) $\Phi(\eta_1) = \Phi(\eta_2) - 0,266$	(5) η_1	(6) $y_1 = \eta_1 \times 3$
5,0	1,66	1,549	1,283	1,448	4,344
4,5	1,50	1,351	1,085	1,317	3,951
4,0	1,33	1,110	0,844	1,182	3,546
3,5	1,13	0,713	0,447	1,060	3,180
3,0	Régimen uniforme				3,000

La curva representativa se acompaña a continuación en la figura 89.

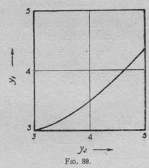


FIG. 89.

Cuestión 3.ª Suponiendo que el caudal se reduce a $Q=60$ m³/sg., mientras que el nivel en la sección 2 se conserva $y_2=3$ m., determinar el correspondiente calado y_1 en la sección 1.

$Q=60$ m³/sg. corresponde a $\mathfrak{K}=60/\sqrt{4}\times 10^2=3\,000$ que, según la lámina III, corresponde a un calado normal $y_0=2,26$ m. De acuerdo con ello, en la figura 88/3 el caudal se representa por la línea de régimen uniforme $y_0=2,26$ m. Para la sección se tiene $y_2=3$ m.; $\eta_2={}^3/_{2,26}=1,33$. Para de-

terminar $\Phi(1{,}33)$ se procede por interpolación rectilínea entre los valores de la tabla para $\Phi(1{,}32)$ y $\Phi(1{,}34)$

$$\Phi(1{,}33) = 1{,}110.$$

El nivel en la sección 1 se determina por:

$$\Phi(\eta_1) = \Phi(\eta_2) - \frac{Ls_0}{y_0} = 1{,}110 - \frac{0{,}8}{2{,}26} = 0{,}756$$

Para hallar η_1 se interpola entre los valores de la tabla

$$\Phi(1{,}14) = 0{,}740\ ;\quad \Phi(1{,}15) = 0{,}766\ ;$$

de donde

$$\eta_1 = 1{,}14 + \frac{(1{,}15 - 1{,}14)(0{,}756 - 0{,}740)}{(0{,}766 - 0{,}740)} = 1{,}146$$

y, por tanto,

$$y_1 = \eta_1 \cdot y_0 = 1{,}146 \times 2{,}26 = 2{,}590 \text{ m.}$$

Cuestión 4.ª Suponiendo ahora que el nivel en la sección 1, detrás de la compuerta, se mantiene constante $y_1 = 3$ m., hallar el calado y_2 correspondiente a un caudal $Q = 60$ m³/sg.

Se tiene ahora para la sección 1:

$$y_1 = 3 \text{ m.}\ ;\quad \eta_1 = 1{,}33\ ;\quad \Phi(\eta_1) = 1{,}110.$$

El calado y_2 se determina por

$$\Phi(\eta_2) = \Phi(\eta_1) + \frac{Ls_0}{y_0} = 1{,}110 + 0{,}354 = 1{,}464.$$

lo que da

$$\eta_2 = 1{,}56 \text{ e } y_1 = 1{,}56 \times 2{,}26 = 3{,}52 \text{ m.}$$

Cuestión 5.ª Supongamos que con un caudal de 100 m³/sg. los calados y_1 e y_2 valen inicialmente 3 m. Determinar el nivel máximo que puede alcanzarse en la sección 2 sin que la elevación del mismo ejerza influencia apreciable en el nivel en 1.

Hay que recurrir en este caso a la definición de «fin» de la curva, dada en el artículo 33, figura 79. La influencia del calado y_2 sobre el de la sección 1 podrá considerarse

nula cuando la curva de remanso producida por una elevación de y_2 sobre y_0 termine antes de la sección, o sea *más corta* que la longitud del canal $L=2$ Km.

Suponiendo definido el fin de la curva como punto donde $\eta_1=1{,}001$, lo que hace que $\Phi(\eta_1)=-0{,}724$, se encuentra el correspondiente nivel en 2:

$$\Phi(\eta_2)=\Phi(\eta_1)+\frac{Ls_0}{y_0}=-0{,}724+\frac{0{,}8}{3}=-0{,}724+0{,}266=$$
$$=-0{,}458$$

La tabla $\Phi(\eta)$ muestra que el valor correspondiente de η_2 se encuentra entre $\eta_1=1{,}001$ y $\eta_1=1{,}005$, lo que indica que en nuestro caso no puede tener lugar una variación apreciable del nivel B sin que afecte al calado y_1.

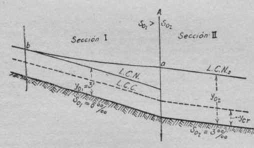


FIG. 90.—Canal con un punto anguloso en la solera, con formación de una curva M_1 (Ejercicio 2.°, Ejemplo 9.°).

Por el contrario, si el canal fuera mucho más largo, las circunstancias variarían. Por ejemplo, con $L=6$ Km., entonces $Ls_0/y_0=0{,}80$; el valor de $\Phi(\eta_2)$ es entonces

$$\Phi(\eta_2)=-0{,}724+0{,}8=0{,}076,$$

que corresponde a $\eta_2=1{,}010$ e $y_2=3\times1{,}010=3{,}030$ m.

El nivel en B puede variar en un 1 por 100 sin afectar sensiblemente al calado en la sección 1.

EJERCICIOS:

1.° Supóngase en el croquis de la figura 88, que el canal es del tipo B (figs. 14 y 15); $y_0=1{,}50$ m.; $L=3$ Km.; $s_0=2^{00}/_{00}$, y $s_0=8^{00}/_{00}$, respectivamente. Empléese $n=3{,}70$.

a) En relación con la cuestión 5.ª del ejemplo precedente determinar el calado y_2 hasta el cual puede elevarse el nivel B sin afectar al calado y_1. Considérese el final de la curva para $\eta_1=1{,}001$ y $\eta_1=1{,}01$, respectivamente.

b) Para ambas pendientes e $y_0=1{,}5$ m. determinar y dibujar la curva de la figura 89.

2.° Suponiendo un canal de tipo B, con una discontinuidad en la pendiente (fig. 90), $s_{01}=6^{00}/_{00}$; $s_{02}=3^{00}/_{00}$. El caudal Q corresponde a régimen uniforme en la sección 1, con $y_{01}=1$ m. Empléese la curva $\mathfrak{K}$ con coeficientes de Bazin. Tómese $n=3{,}70$. Determínese el perfil de la lámina libre.

NOTA ACLARATORIA. En este problema, como en otros, más adelante, donde se trata de un canal con una discontinuidad en la pendiente, es esencial, ante todo, establecer el *tipo* de movimiento, porque (figura 90) siendo s_{02} menor que s_{01} la curva debe ascender desde el calado normal $y_{01}=1{,}50$ m. al calado normal $y_{02}>1{,}50$ m.

Para determinar el tipo y posición de la curva de transición, puede ser suficiente el razonamiento que se expone seguidamente: Si primeramente, calculado y_{cr}, se ve que ambos, y_{02} e y_{01}, son $>y_{cr}$, el movimiento es de clase M. La única curva y^+ posible será una curva M_1 que debe encontrarse totalmente dentro de la sección 1, por encima de la línea y_{01}. La curva de transición *no puede* encontrarse en la sección 2, ya que en tal caso la única curva posible con $y<y_{02}$ sería una curva y^-, del tipo M_2. El calado normal y_{02} actúa en la sección A como una barrera que produce la curva de remanso $a-b$ del tipo M_1.

37. LA CURVA M_2.

EJEMPLO 10

El canal, de la figura 14, con $s_0=10^{00}/_{00}$, termina en un escalón (fig. 91); $y_0=1{,}50$ m.

El caudal, con un coeficiente G.K.$=0{,}013$, es:

$$Q=\mathfrak{K}_0\sqrt{s_0}=3{,}13\sqrt{10}=9{,}9 \text{ m}^3/\text{sg.};\ \sigma_0=28{,}7^{00}/_{00}$$

Con $s_0<\sigma_0$ el régimen es de clase M. La curva es del tipo M_2, descendente desde el calado normal $y_0=1{,}50$ m. al crítico y_{cr} en la proximidad del borde.

Cuestión 1.ª Determínese la curva producida
El valor de y_{cr} se obtiene (Ec. [28]):

$$\mathfrak{M}_{cr} = Q/\sqrt{g} = 9{,}9/3{,}132 = 3{,}16 \; ; \quad y_{cr} = 1{,}10.$$

Para $\sigma_0 = 28{,}7^{00}/_{00}$, $\beta_0 = 10/28{,}7 = 0{,}348$, $\sigma_{cr} = 29{,}5^{00}/_{00}$, $\beta_{cr} = 10/29{,}5 = 0{,}337$, puede emplearse como valor medio de β, $\beta = 0{,}34$ y de la constante de integración $1-\beta = 0{,}66$.

Con $(1-\beta) = \text{const.}$ se puede poner la ecuación en la forma [86]

$$l = \frac{y_0}{s_0}\left[\Pi\,(\eta_2) - \Pi\,(\eta_1)\right]$$

Los límites de integración serán:

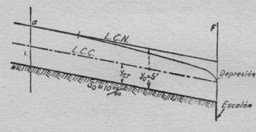


FIG. 91.—Curva M_2 en un canal, en las proximidades de un escalón. (Ejemplo 10).

Para la sección sobre el borde del escalón (F):

$$\eta_F = \eta_{cr} = y_{cr}/y_0 = 1{,}10/1{,}50 = 0{,}734.$$

Para la sección correspondiente al final de la curva (a):

$$\eta_a = 0{,}999 \text{ e } y_a = 0{,}999\,y_0 = 1{,}498 \text{ m}.$$

Siguiendo el procedimiento expuesto en el Ejemplo 7.º, se puede elegir una serie de intervalos de calados y determinar las longitudes de los arcos comprendidos. Supondremos que y_{cr} se produce sobre el borde del escalón (1). Toma-

(1) En otros términos: se desprecia la pequeña distancia entre la sección C y la sección F en la figura 37. En el presente estado de la materia, en que se conoce poco sobre las láminas libres en régimen curvo, esta aproximación es admisible y justificada.

remos como origen para medir longitudes L la sección F.

Para el intervalo de calados entre 1,50 m. y 1,10 m. el exponente hidráulico es

$$n = 2\,\frac{\mathrm{Lg}\,\dfrac{\mathfrak{K}\,(1{,}50)}{\mathfrak{K}\,(1{,}10)}}{\mathrm{Lg}\,1{,}5/1{,}10} = 2\,\frac{0{,}2355}{0{,}1335} = 3{,}53$$

Puede aceptarse un valor intermedio entre las columnas $n=3{,}4$ y $n=3{,}6$ como valor de $B(\eta)$.

$$y_0/s_0 = 1{,}5/10 \cdot 10^{-4} = 1\,500 \text{ m.}$$

El cálculo se resume en la tabla que sigue.

TABLA XIV

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
y	$\eta = y/1{,}5$	$B(\eta)$ $n=3{,}5$	$0{,}66\,B(\eta)$	$\Pi(\eta) = \eta - 0{,}66\,B$	$\Delta\,\Pi$	l	L
1,100	0,733	0,803	0,530	0,203		....	0
					0	0	
1,150	0,766	0,854	0,563	0,203	....	....	0
					0,005	7,5	
1,200	0,800	0,913	0,602	0,198	....	....	7,5
					0,011	16,5	
1,250	0,833	0,979	0,646	0,187	....	....	24,0
					0,018	27,0	
1,300	0,866	1,056	0,697	0,169	....	....	51,0
					0,028	42,0	
1,350	0,900	1,151	0,759	0,141	....	....	93,0
					0,053	79,5	
1,400	0,933	1,280	0,845	0,088	....	....	172,5
					0,107	160,5	
1,450	0,966	1,493	0,985	— 0,019	....	....	333,0
					0,560	840,0	
1,498	0,998	2,390	1,577	— 0,579	....	....	1173,0

En la figura 92 se dibuja la curva.

NOTA: En la columna (7) aparece nula la distancia entre los calados 1,1 y 1,15 porque la distancia horizontal en que tiene lugar el

respectivo incremento de calado no puede estimarse, dentro del grado de precisión con que se ha realizado el cálculo.

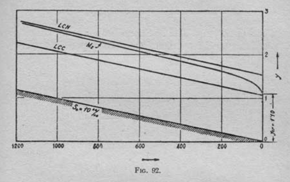


Fig. 92.

Ejemplo 11

Un canal de tipo D (lámina V) une dos embalses distantes 2 Km. (fig. 93); $s_0 = 1^{0}/_{00}$; n (G.K.) $= 0{,}025$. El canal está proyectado para régimen uniforme con $y_0 = 4$ m. correspondiente a un caudal $Q = \mathfrak{K}_0 \sqrt{s_0} = 42{,}6$ m^3/sg. En lo que sigue se supondrá que el caudal permanece constante; en tanto que los calados y_1 e y_2 descienden por bajo de $y_0 = 4$ m. El resultado será la formación de una curva de tipo M_2. Suponiendo no baje de $y = 1{,}50$ m., determinaremos el exponente hidráulico para el intervalo entre $y = 1{,}5$ m. e $y = 4$ m.

$$n = 2\,\frac{\mathrm{Lg}\,\dfrac{\mathfrak{K}\,(4)}{\mathfrak{K}\,(1{,}5)}}{\mathrm{Lg}\,4/1{,}5} = 2\,\frac{\mathrm{Lg}\,6{,}79}{\mathrm{Lg}\,2{,}66} = 3{,}92$$

Aplicando las tablas de la función de régimen variado puede tomarse un valor medio entre los de las columnas correspondientes a $n = 3{,}8$ y $n = 4{,}0$. Para determinar el valor de $1 - \beta$ se tiene para el intervalo de calados entre $y = 1{,}5$ e $y = 4$ m.

$y = 1{,}5$; $\sigma = 24{,}26^{00}/_{00}$; $\beta = s_0/\sigma = 1/24{,}26 = 0{,}0412$; $1 - \beta = 0{,}959$
$y = 4$; $\sigma = 21{,}62^{00}/_{00}$; $\beta = s_0/\sigma = 1/21{,}62 = 0{,}0461$; $1 - \beta = 0{,}954$

Puede tomarse como valor medio de $1-\beta$, 0,956. Se tiene además:

$$Ls_0 = 2\,000 \,.\, 1 \,.\, 10^{-4} = 0{,}2 \;;\quad Ls_0/y_0 = 0{,}05$$

Cuestión 1.ª (fig. 93/2). Suponiendo que el nivel en *B* desciende a $y_2 = 3$ m., determinar el correspondiente y_1.

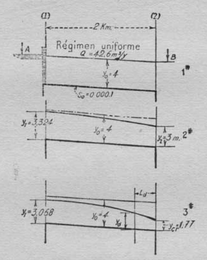


FIG. 93.—Figuras relativas al Ejemplo 11.

Se tiene en el perfil 2:

$$y_2 = 3 \text{ m.} \;;\quad \eta_2 = 3/4 = 0{,}75$$

$B(\eta_2)$ (valor medio entre $B = 0{,}815$ y $B = 0{,}808) = 0{,}811$;
$\Pi(\eta_2) = \eta_2 - (1-\beta)\,B(\eta_2) = 0{,}750 - 0{,}956 \times 0{,}811 = -0{,}025$.

Para determinar el nivel en 1 se tiene:

$$\Pi(\eta_1) = \Pi(\eta_2) - \frac{Ls_0}{y_0} = -0{,}025 - 0{,}05 = -0{,}075$$

El correspondiente valor de η_1, que verifica:

$$\Pi(\eta_1)=\eta_1-0{,}956\,B(\eta_1)=-0{,}075$$

se determina como sigue:

Se tiene, para $n=3{,}90$:

$$B(0{,}84)=0{,}966\;;\quad \Pi=-0{,}083$$
$$B(0{,}83)=0{,}946\;;\quad \Pi=-0{,}074$$

de donde $\eta_1=0{,}831$ y, por tanto, $y_1=4\times 0{,}831=3{,}324$ m.

Cuestión 2.ª Suponiendo que el nivel 1 desciende de $y_1=4$ m. a $y_1=3{,}5$ m., determinar a qué nivel desciende el calado en 2, siendo el caudal $Q=42{,}6$ m³/sg.

Se tiene, para la sección 1:

$$\eta_1=\frac{3{,}6}{4}=0{,}9\;;\quad B(\eta_1)=1{,}111\;;\quad \Pi(\eta_1)=0{,}9-0{,}956\times 1{,}111=$$
$$=-0{,}162$$

El nivel y_2 se determina por

$$\Pi(\eta_2)=\eta_2-0{,}956\,B(\eta_2)=\Pi(\eta_1)+\frac{Ls_0}{y_0}=-0{,}162+0{,}05=$$
$$=-0{,}112$$

Para determinar η_2 se tiene, en las tablas, con suficiente aproximación:

Para $\eta_2=0{,}86$; $B(0{,}86)=1{,}008$; $\Pi(0{,}86)=0{,}86-0{,}956\times$
$\times 1{,}007=-0{,}103$

Para $\eta_2=0{,}87$; $B(0{,}87)=1{,}032$; $\Pi(0{,}87)=0{,}87-0{,}956\times$
$\times 1{,}032=-0{,}116$

de donde

$$\eta_2=0{,}867\;;\quad y_2=4\times 0{,}867=3{,}468 \text{ m.}$$

Cuestión 3.ª (fig. 93/3). Determinar la posición más baja de la curva M_2 con que puede fluir el caudal $Q=42{,}6$ m³/sg.

La posición más baja en el perfil 2 es la correspondiente al calado crítico. Conforme se ha demostrado en el art. 17, el calado y_2 no puede bajar de y_{cr}.

Para determinar y_{cr} se tiene:

$$\mathfrak{M}_{cr}=(a^3/b)_{cr}=Q/\sqrt{g}=42{,}6/\sqrt{9{,}81}=13{,}6$$

En la lámina V se tiene $y_{cr}=1{,}77$; para la sección 2, con $y_2=y_{cr}=1{,}77$, se tiene:

$$\eta_2=1{,}77/4=0{,}442 \text{ ; } B(\eta_2)=0{,}445 \text{ ; } \Pi(\eta_2)=0{,}442-0{,}956\times 0{,}445=0{,}017$$

El nivel correspondiente en 1 se determina por

$$\Pi(\eta_1)=\eta_1-0{,}956\,B(\eta_1)=0{,}017-0{,}05=-0{,}033$$

Para determinar η_1 se tiene en las tablas:

η	$B(\eta)$	$\Pi(\eta)$
0,76	0,827	−0,030
0,77	0,842	−0,034

Interpelando se tiene $\eta_1=0{,}767$ y, por tanto, la posición más baja del calado y_1 compatible con un caudal de 42,6 m³/sg. es $=4\times 0{,}767=3{,}068$ m.

Cuestión 4.ª Suponiendo que el nivel en 2 varía entre $y_0=4$ m. e $y_{cr}=1{,}77$, determinar el efecto producido en el perfil 1 por tal variación de y_2.

Este problema es similar a la Cuestión 2.ª del Ejemplo 9.º Los límites del nivel y_1 son: $y_0=4$ m. e $y_{1\,min}=3{,}068$. Para hallar puntos intermedios se construye la siguiente tabla:

TABLA XV

y_2	$\eta_2=y_2/4$	$B(\eta_2)$	$0{,}956\,B(\eta_2)$	$\Pi(\eta_2)$	$\Pi(\eta_1)=\Pi(\eta_2)-0{,}5$	η_1	y_1
4	Régimen uniforme						4
3,60	0,900	1,111	1,662	−0,162	−0,212	0,923	3,692
3,00	0,750	0,811	0,775	−0,025	−0,075	0,831	3,324
2,00	0,500	0,507	0,485	0,015	−0,035	0,772	3,088
1,77	0,442	0,445	0,425	0,017	−0,033	0,767	3,068

La curva se representa en la figura 94.

Cuestión 5.ª En una curva descendente en que el calado disminuye hacia aguas abajo, la velocidad aumenta. En un canal con cajeros sin revestir puede provocar erosio-

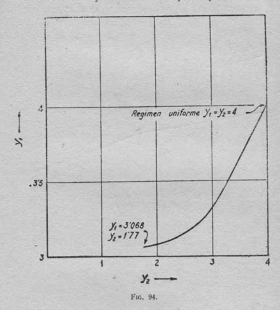


Fig. 94.

nes peligrosas este incremento de velocidad. En efecto, en el caso anterior la velocidad para y_{cr} es

$$v = Q/a_{cr} = 42{,}6/11{,}78 = 3{,}62 \text{ m/sg.}$$

Supongamos que debido a la consistencia del terreno sobre el que se supone construído el canal se produce el límite peligroso de velocidad para $v = 1{,}20$ m/sg. Con $Q = 42{,}6$ m³/sg. la sección mojada es $a = 35{,}5$ m² y el calado (véase lámina V) 3,70 m.

Supongamos que el canal hay que revestirlo a lo largo de todo el trayecto del mismo en que la velocidad sobre-

pase 1,20 m/sg. Determinar qué longitud L_D (fig. 93/3) viene afectada por el revestimiento.

La protección deberá extenderse al tramo en que el calado sea <3,70 m. El problema se reduce, en este caso, a determinar la longitud L_D entre $y_{cr}=1,77$ e $y=3,70$ m.

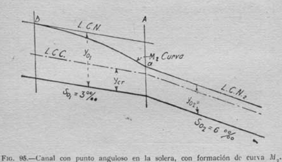


FIG. 95.—Canal con punto anguloso en la solera, con formación de curva M_2. (Ejercicio 2.°, Ejemplo 11.)

De la Tabla XV, para $y=1,77$; $\Pi(\eta_2)=0,017$. Para $y_1=3,70$ m.; $\eta_1=3,70/4=0,925$. Con $n=3,90$:

$B(0,92)=1,177$	$B(0,925)=1,196$;
$B(0,93)=1,215$	$\Pi=0,925-0,956\times1,196=-0,218$

por tanto:

$$L_D=\frac{y_0}{s_0}=[\Pi(\eta_2)-\Pi(\eta_1)]=4\cdot10^4[0,017-(-0,218)]=9\,400 \text{ m}.$$

Si el canal sólo tiene 2 Km. hay que protegerlo todo, y si más, hasta llegar a los 9400 m. del extremo inferior.

EJERCICIOS:

1.° Supongamos el caso representado en la figura 93 con canal de tipo A; $s_0=4\times10^{-4}$. El caudal constante corresponde a $y_0=3$ m. Determinar el mínimo valor posible de y_1 para longitudes respectivas del canal: $L=2000$ m.; $L=4000$ m.; $L=6000$ m.

2.ª Se supone invertido el orden de las pendientes del

canal de la figura 90, quedando tal como se representa en la figura 95: $s_{01}=3^{00}/_{00}$ y $s_{02}=6^{00}/_{00}$. Determinar el perfil de la lámina libre suponiendo un caudal correspondiente a $y_{02}=1,50$ m.

Indicación.—Por un razonamiento análogo al del ejercicio del Ejemplo 9.° se demuestra que la curva de transición debe ser del tipo M_2, situada totalmente en el tramo superior, después de y_{01}. El calado en la sección A será $y_a=y_{02}$.

38. LA CURVA M_3.

EJEMPLO 12

Supongamos el caso representado en la figura 96 donde el agua fluye por una compuerta a un canal de sección rectangular, tipo C (lámina IV). El canal tiene una pendiente

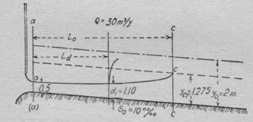


FIG. 96.—Curva M_3, en un canal con pendiente suave, tras una compuerta de regulación.

$s_0=10^{00}/_{00}$; coeficiente de G.K. $n=0,013$. La compuerta de paso a un caudal $Q=22,5$ m³/sg. con un calado en la *vena contracta* $y_a=0,50$ m.

Cuestión 1.ª Determinar la lámina libre.

El calado normal

$$\mathcal{K}_0=Q/\sqrt{s_0}=22,5/\sqrt{10}\,.\,10^{-2}=713,8\,;\quad \text{por la lámina IV,}$$

$$y_0=2,00 \text{ m.}$$

El calado crítico

$$q=22,5/5=4,5 \text{ m}^3/\text{sg.}\,;\quad y_{cr}=\sqrt[3]{q^2/g}=\sqrt[3]{20,3/9,81}=1,275 \text{ m.}$$

Con $y_0>y_{cr}$ e $y_a=0,50$ m. $<y_{cr}$, la curva es del tipo M_3.

Las características del régimen en la *vena contracta* son:

$$v_a = 4{,}5/0{,}5 = 9 \text{ m/sg.}; \; v_a^2/2g = 4{,}12 \text{ m.}; \; s_a = 0{,}50 + $$
$$+ 4{,}12 = 4{,}62 \text{ m.}; \; \lambda = 2\,\frac{4{,}12}{0{,}5} = 16{,}48$$

La curva $1-\beta$ (lámina IV).

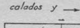
Para

$y_0 = 2{,}00$ m., $\sigma_0 = 38{,}50^{00}/_{00}$; $\beta_0 = 10/38{,}5 = 0{,}260$; $1-\beta_0 = 0{,}740$

Para otros calados:

y	0,5	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75
σ_0 en $^{00}/_{00}$	33,39	32,78	33,34	34,31	35,39	36,99
β	0,299	0,305	0,300	0,291	0,281	0,270
$1-\beta$	0,605	0,695	0,700	0,709	0,719	0,730

En la figura 97 se dibuja la curva $1-\beta$.



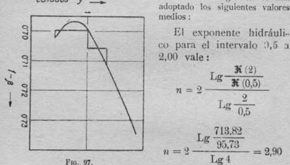


Fig. 97.

Para la integración se han adoptado los siguientes valores medios:

El exponente hidráulico para el intervalo 0,5 a 2,00 vale:

$$n = 2\,\frac{\mathrm{Lg}\,\dfrac{\mathfrak{K}(2)}{\mathfrak{K}(0{,}5)}}{\mathrm{Lg}\,\dfrac{2}{0{,}5}}$$

$$n = 2\,\frac{\mathrm{Lg}\,\dfrac{713{,}82}{95{,}73}}{\mathrm{Lg}\,4} = 2{,}90$$

Los límites de la curva son:

$$y_{cr} = 1{,}275 \text{ con } \eta_{cr} = 1{,}275/2 = 0{,}637$$
$$y_a = 0{,}50 \text{ con } \eta_a = 0{,}5/2 = 0{,}250$$
$$y_0/s_0 = 2\,000$$

Dividamos el intervalo total de los calados en otros parciales, cuyas distancias sean:

$$l = \frac{y_0}{s_0} \times [\Delta\eta - (1-\beta)\Delta B] = y_0/s_0 \Delta \text{II}$$

Las distancias L vienen medidas a partir del perfil de calado crítico hacia aguas arriba.

TABLA XVI

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
y	$\eta = y/2$	$1-\beta$	$B(\eta)$ $n=2,9$	$\Delta\eta$	ΔB	$(1-\beta)\Delta B$	Δ II	l en m	L
1,275	0,637	↑	0,689						0,00
				0,002	0,002	0,0014	0,0006	1,2	
1,270	0,635	0,710	0,687						1,20
		↓		0,010	0,014	0,0098	0,0002	0,4	
1,250	0,625	—	0,673						1,60
		↑		0,025	0,026	0,0183	0,0067	13,4	
1,200	0,600	0,705	0,647						15,00
		↓		0,100	0,128	0,0902	0,0098	19,8	
1,000	0,500	—	0,519						34,80
		↑		0,100	0,111	0,0779	0,0221	44,2	
0,800	0,400	0,722	0,408						79,00
				0,150	0,157	0,1102	0,0398	79,6	
0,500	0,250	↓	0,251						158,60

En la figura 98 se representa la curva.

En el ejemplo anterior la longitud total hallada entre la *vena contracta* e y_{cr} es $L=158{,}6$ m. Si el canal fuera más corto de 158,6 m. y no existiera en él ningún obstáculo, el líquido fluiría libremente, como en la figura 54. Pero, por lo general, el desagüe de una compuerta, con formación de curva M_3, provoca el resalto.

Cuestión 2.ª Suponiendo, con los mismos datos anteriores, que el resalto comienza en el calado $d_1=1{,}10$ m., determinar la distancia L_d (fig. 99) de la *vena contracta* al pie del resalto.

El problema se resuelve hallando la distancia entre los calados $y_0=0{,}5$ m. y $d_1=1{,}00$ m.

El calado está en el intervalo en que $1-\beta=0{,}705$. Por consiguiente, siguiendo el procedimiento de la figura 85, determinaremos la distancia de la sección 1,10 a la 1,00, la cual (V. Tabla XVI) se encuentra a 123,8 m. de a.

Para el intervalo 1,00 a 1,10 se tiene:

$y_2 = 1,1$; $\eta_2 = 1,1/2 = 0,55$; $B(\eta) = 0,577$

$y_1 = 1,0$; $\eta_1 = 1,0/2 = 0,50$; $B(\eta) = 0,519$; $1 - \beta = 0,705$

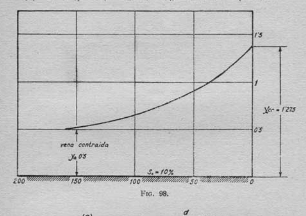


Fig. 98.

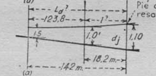


Fig. 99.—Localización del resalto. Ejemplo 12, Cuestión 2.ª

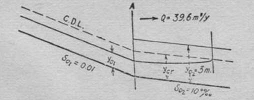


Fig. 100.—Canal con cambio brusco de pendiente fuerte a suave con formación de una curva M_2 (ejercicio del Ejemplo 12).

$\Delta\eta = 0{,}05$; $\Delta B = 0{,}058$; $\Delta B \times 0{,}705 = 0{,}0409$

$\Delta\Pi = \Delta\eta - (1-\beta)\Delta B = 0{,}05 - 0{,}0409 = 0{,}0091$

$l_{2,1} = 0{,}0091 \times 2000 = 18{,}2$ m.

La distancia total desde la *vena contracta* es

$$L_a = 123{,}8 + 18{,}2 = 142{,}0 \text{ m.}$$

EJERCICIO:

Se da un canal del tipo *B* (fig. 14) representado en la figura 100, en el que $s_{01} = 0{,}01$ y $s_{02} = 10\ ^{00}/_{00}$.

Se supone un caudal $Q = 39{,}6$ m³/sg., correspondiente a $y_{02} = 3{,}0$ m.

a) Suponiendo que la longitud del tramo 2 es 200 m., determinar el perfil longitudinal de la lámina libre.

b) Determinar la máxima longitud teórica del tramo 2 para que se desagüe sin formación de resalto.

Indicación.—Determínese y_{01} e y_{cr}. Como y_{01} es menor que y_{cr} e y_{02} es mayor que y_{cr}, se formará una curva M_3 que comienza en la sección *a* con $y_a = y_{01}$.

39. LA CURVA S_1.

EJEMPLO 13

Supongamos un canal de sección rectangular, suficientemente ancho para poder ser considerado del tipo de la

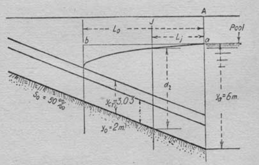


FIG. 101.—Curva ascendente S_1 en una corriente de pendiente fuerte que desemboca en un embalse.

figura 73, con $s_0=50\ ^{00}/_{00}$, terminando en un embalse (figura 101). Empléese para C la fórmula de G. K. correspondiente a $n=0{,}015$, $s_0=10\ ^{00}/_{00}$. Se supone que $y_0=2$ m., lo que da, por metro de ancho: $K=C \cdot y^{3/2}=82{,}411\times 2^{3/2}=$ $=233{,}09$ y $q=233{,}09\times\sqrt{50}\times 10^{-2}=16{,}482$ m³/sg.

Cuestión 1.ª Suponiendo que el calado en la sección a es $y_a=6$ m., determinar y dibujar la línea de lámina libre.

El calado crítico es

$$y_{cr}=\sqrt[3]{q^2/g}=\sqrt[3]{27{,}69}=3{,}03 \text{ m.}$$

Para $y_0=2$ m.$<y_{cr}$, el régimen es de clase S.

Con $y_a=6$ m.$>y_{cr}$, la curva es del tipo S_1. Los límites de integración son: $y_b=y_{cr}=3{,}03$ e $y_a=6$ m.

Exponente hidráulico.—Tomemos como valor medio $n=3{,}4$:

$$y_0/s_0=2/50 \cdot 10^{-4}=400 \text{ m.}$$

La curva $1-\beta$.—Para una sección rectangular de gran ancho, el calado crítico es $\sigma'=g/C^2$ (fig. 40).

Para los diferentes calados, los valores de σ' y $1-\beta$ son:

y	C	$^{00}/_{00}\ \sigma'$	$\beta=s_0/\sigma'$	$1-\beta$
10,00	91,750	11,65	4,292	3,292
8,00	90,764	11,91	4,198	3,198
6,00	89,362	12,28	4,072	3,072
5,00	88,390	12,55	3,984	2,984
4,50	87,797	12,73	3,927	2,927
4,00	87,106	12,92	3,869	2,869
3,50	86,287	13,17	3,796	2,796
3,00	85,292	13,48	3,709	2,709
2,50	84,043	13,89	3,600	2,600
2,00	82,411	14,44	3,462	2,462
1,50	80,129	15,28	3,272	2,272
1,00	76,573	16,73	2,989	1,989

En la figura 102 se representa la curva $1-\beta$.

curva (1-β)

y ⟶

valores de -(1 β) ⟶

Fig. 102.

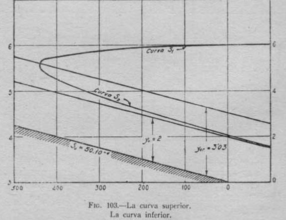


Fig. 103.—La curva superior.
La curva inferior.

Para $s_0 > \sigma_0$, $1-\beta$ es negativa. Además, los valores de $1-\beta$ son importantes, por lo que habrá que tomar un valor medio, por separado, de $1-\beta$, en cada intervalo.

En la Tabla XVII se resumen los cálculos.

Los valores de $1-\beta$ (colum. 6) se toman para cada calado de la curva (fig. 102). El valor de $1-\beta$ para un intervalo (col. 7) es la media aritmética de los valores adjuntos de la columna á. En la columna 9, $\Delta\Pi = \Delta\eta - (1-\beta)\Delta B$. Las distancias parciales (col. 10) son $l = \Delta\Pi \times 400$ m. Las distancias L se miden a partir de la sección a.

La curva se representa en la figura 103.

Cuestión 2.ª La curva, conforme se ha trazado anteriormente, sobre el intervalo total de calados hasta y_{cr}, es un perfil teórico. Generalmente, la curva S_1 es un tramo de régimen gradualmente variado a continuación de un resalto (fig. 6). Suponiendo que se conoce el calado d_2 después del resalto, se puede determinar la posición de éste hallando la distancia L_j de A a la sección j con $y = d_2$.

TABLA XVII

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
y	η	$\Delta\eta$	$B(\eta)$	$\Delta B(\eta)$	$(1-\beta)$	$(1-\beta)$ en el intervalo	$(1-\beta)$ ΔB	$\Delta\Pi$	l	L
				—	—	—	+			
6,00	3.00		0,030		3,07					0,00
		0,10		0,003		3.06	0,0092	0,0908	36,32	
5,86	2,90		0,033		3,05					36,32
		0,20		0.006		3,04	0,0182	0,1818	72,72	
5,40	2,70		0,039		3.02					109,04
		0.20		0,008		3,00	0,0240	0,1760	70,40	
5,00	2,50		0,047		2,98					179,44
		0,20		0,011		2,96	0,0326	0,1674	66,96	
4,60	2,30		0,058		2,94					246,40
		0,20		0,015		2,91	0,0436	0,1564	62,56	
4,20	2,10		0,073		2,89					308.96
		0,30		0,035		2,85	0,0997	0,2003	80.12	
3.60	1,80		0,108		2,81					389,08
		0,31		0,066		2.76	0,1822	0,1278	51,12	
3,03	1,51		0,174		2,71					440,20

Supongamos, en nuestro caso, que $d_2 = 5,20$ m. Para localizar el resalto, según la Tabla XVII, hay que hallar la distancia de la sección 5,20 a la sección 5,40 para la que $L = 109,04$ m. Empleando para dicho intervalo un valor medio de $(1-\beta) = -3,02$, tenemos:

Para $y_2=5,40$; $\eta_2=2,70$; $B(\eta_2)=0,039$
Para $y_1=5,20$; $\eta_1=2,60$; $B(\eta_1)=0,043$

$$\Delta\eta=0,10\ ;\ \Delta B=-0,004\ ;\ (1-\beta)\Delta B=0,0121$$

$$\Delta\Pi=\Delta\eta-(1-\beta)\Delta B=0,10-0,0121=0,0879$$

$$l_{5.4-5.2}=\frac{y_0}{s_0}\Delta\Pi=400\times0,0879=35,16\ \text{m}.$$

La distancia total al resalto desde la sección 6 es:

$$L_j=109,04+35,16=144,20\ \text{m}.$$

EJERCICIOS:

1.° En la figura 101 supóngase un canal del tipo B (figura 15) con $s_{01}=40\ ^{00}/_{00}$; $y_{01}=0,50$ m. ; $y_a=3$ m.

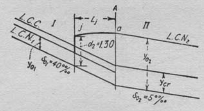


FIG. 104.—Canal con cambio brusco de pendiente fuerte a suave, con formación de una curva S_1 (Ejercicio 2.° del Ejemplo 13).

Empléense coeficientes de Bazin y $n=3,70$. Determínese la lámina libre.

2.° Un canal (fig. 104), tipo B, $s_{01}=40\ ^{00}/_{00}$, $s_{02}=5\ ^{00}/_{00}$, $Q=10$ m³/sg.

Se sabe que con $s_{01}=40\ ^{00}/_{00}$ en condiciones normales se produce el régimen rápido con formación de resalto, siendo el calado después del mismo $d_2=1,30$ m. Determínese la lámina libre empleando coeficientes de Bazin y $n=3,70$.

NOTA.—En este caso, cuando s_{01} es fuerte, s_{02} suave e $y_{02}>d_2$, la línea ja es una curva S_1 con $y_a=y_{02}$.

40. La curva S_2.

Ejemplo 14

La figura 105 (*a*) representa la toma del canal estudiado en el Ejemplo 13 (fig. 101). Se produce una *depresión* sobre la sección *A*, con $y_a = y_{cr}$.

Cuestión 1.ª Suponiendo las mismas características que en el Ejemplo 13, determinar y dibujar la curva $a-b$.

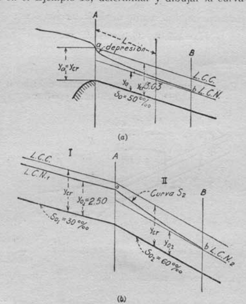


Fig. 105.—(*a*) Curva S_2 al comienzo de un rápido (Ejemplo 14). (*b*) Curva S_2 en un canal con cambio brusco de pendiente (ejercicio del Ejemplo 14).

La curva en cuestión comienza para $y_a = 3{,}03$ m. y termina en el calado y_b, que supondremos es $y_b = 1{,}001 y_o$. Los valores de $1-\beta$ se toman de la figura 102. Los cálculos son análogos a los de la Tabla XVII. Emplearemos el exponente $n = 3{,}4$.

La distancia L se mide en este caso hacia aguas abajo, tomando como perfil origen el A, con $y_a = y_{cr}$. Se obtiene en la columna 11 de la Tabla XVIII sumando las longitudes parciales l (col. 10). En la figura 103 se dibuja la curva.

EJERCICIO:

Un canal de tipo B (figs. 14 y 15) tiene una discontinuidad de pendiente (fig. 105/b) que pasa de $s_{01} = 30$ $^{00}/_{00}$ a $s_{02} = 60$ $^{00}/_{00}$. $y_{01} = 2{,}50$ m. Empléese el coeficiente de Bazin; $n = 3{,}70$. Determinar la curva de lámina libre.

NOTA.—El ejemplo se refiere al caso de un canal en que s_{01} y s_{02} son pendientes fuertes, siendo $s_{01} < s_{02}$. La curva de transición, situada totalmente sobre el tramo inferior, es del tipo S_2, comenzando en la sección A con $y_a = y_{01}$ y asintótica a la línea de régimen uniforme y_{02}.

TABLA XVIII

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
y	η	$\Delta\eta$	$B(\eta)$ $n=3{,}2$	$\Delta B(\eta)$	$1-\beta$ para el calado	$1-\beta$ para el intervalo	$(1-\beta) \times \Delta B$	$\Delta\Pi$	l	L
		—			—	—	—			
2,002	1,001		2,008		2,462					1,596
		0,009		0,717		2,465	1,767	1,758	703,20	
2,020	1,010		1,291		2,467					892
		0,010		0,213		2,470	0,526	0,516	206,4	
2,040	1,020		1,078		2,473					626
		0,030		0,276		2,481	0,684	0,654	261,6	
2,100	1,050		0,802		2,490					424
		0,050		0,201		2,503	0,503	0,453	181,2	
2,200	1,100		0,601		2,517					243
		0,100		0,185		2,544	0,471	0,371	148,4	
2,400	1,200		0,416		2,572					95
		0,100		0,098		2,597	0,254	0,154	61,6	
2,600	1,300		0,318		2,622					33
		0,100		0,062		2,644	0,164	0,064	25,6	
2,800	1,400		0,256		2,666					8
		0,115		0,050		2,690	0,134	0,019	7,6	
3,030	1,515		0,206		2,714					0

41. LA CURVA S_3.

EJEMPLO 15

Supongamos que el canal de los Ejemplos 13 y 14 se alimenta por una compuerta, como se indica en la figura 106. La sección A es la *vena contracta*, con $y_a = 1{,}00$ m. La sección B, al final de la curva S_3, tiene $\eta_b = 0{,}999$; $y_b = 1{,}998$ m.

Cuestión 1.ª Suponiendo las mismas características hidráulicas que en el Ejemplo 13, determinar y representar la curva $a-b$.

El intervalo de integración es de $y_a = 1{,}00$ m. a $y_b = 1{,}998$ metros.

El procedimiento es similar al seguido en las Tablas XVII y XVIII, tomando como valor de $n = 3{,}20$.

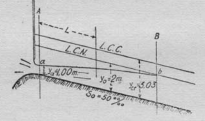


FIG. 106.—Curva S_3 a la salida de una compuerta que desagua en un río con fuerte pendiente.

TABLA XIX

	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
y	η	$\Delta\eta$	$B(\eta)$	$\Delta B(\eta)$	$1-\beta$	$1-\beta$ para el intervalo	$(1-\beta) \times \Delta B$	Δ II	l	L
		—			—	—	—			
1,998	0,999		2,663		2,461					1,894
		0,009		0,723		2,457	1,776	1,767	706,8	
1,980	0,990		1,940		2,454					1,188
		0,020		0,380		2,446	0,929	0,909	363,6	
1,940	0,970		1,560		2,439					824
		0,030		0,197		2,427	0,478	0,448	179,2	
1,880	0,940		1,363		2,416					645
		0,040		0,174		2,421	0,421	0,381	152,4	
1,800	0,900		1,189		2,386					492
		0,050		0,146		2,367	0,345	0,295	118,0	
1,700	0,850		1,043		2,348					374
		0,050		0,109		2,329	0,254	0,204	81,6	
1,600	0,800		0,934		2,310					293
		0,100		0,168		2,257	0,279	0,279	111,6	
1,400	0,700		0,766		2,215					181
		0,100		0,135		2,158	0,291	0,191	76,4	
1,200	0,600		0,631		2,102					105
		0,100		0,177		2,045	0,362	0,262	104,8	
1,000	0,500		0,514		1,989					0

Las distancias L se miden hacia aguas abajo, a partir de la *vena contracta a*.

La curva representada en la figura 107 está referida a una línea

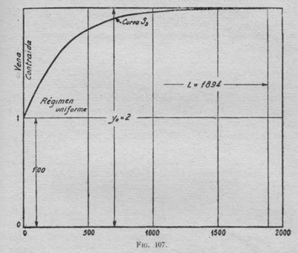


FIG. 107.

horizontal, para no deformar la representación, como resultaría a la escala adoptada.

EJERCICIO:

Supongamos (fig. 108) que se invierte el orden de las

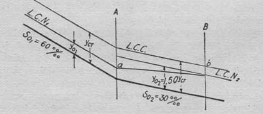


FIG. 108.—Formación de una curva S_3 en un canal con cambio brusco de pendiente (ejercicio del Ejemplo 15).

pendientes del canal de la figura 150, b (ejercicio del ejemplo 14), y que $y_{02}=1{,}50$ m. Determinar y representar la línea de lámina libre.

NOTA.—Aunque ambas pendientes siguen siendo fuertes, es, ahora, s_{01} mayor que s_{02}. La curva de transición es una curva S_3, $a-b$, situada totalmente sobre el tramo inferior, siendo $y_a=y_{01}$.

42. OBSERVACIONES GENERALES.—Visto lo que se acaba de exponer, parece indicado hacer ciertas deducciones de carácter general relacionadas con la influencia de los diferentes factores y la precisión de los cálculos.

Las Ecs. [86] y [91], que determinan la longitud de la curva para un determinado intervalo del calado, dan dicha longitud como producto del factor y_0/s_0 por el valor del paréntesis $(\Phi_2-\Phi_1)$ o $(\Pi_2-\Pi_1)$.

A igualdad de los restantes datos la longitud es, por tanto, proporcional a y_0/s_0, es decir, a la longitud de una horizontal trazada por y_0 que corta a la solera del canal.

Las curvas son más largas o más cortas en proporción directa al calado normal e inversa a la pendiente del fondo s_0.

Considerado y_0/s_0 como constante, la longitud de las curvas depende de $\Delta\Phi$ o $\Delta\Pi$, que para un cierto intervalo de $\Delta\eta$ dependen del exponente n. En términos generales: la forma, dimensiones y rugosidad de las paredes se reflejan a través del exponente hidráulico. En general, a mayor exponente menor longitud de curva. Esto se comprueba examinando las tablas y comparando los valores de los incrementos $\Delta\Phi$ o ΔB correspondientes a un mismo intervalo $\Delta\eta$, para valores distintos de n (lámina VI). Se ve que estos incrementos decrecen al aumentar n.

Precisión de los cálculos.—Las curvas $\Delta\Phi$ y ΔB dibujadas en la lámina VI son útiles para dar una idea de la magnitud de los errores cometidos al hacer determinadas hipótesis o al tomar un valor aproximado del exponente hidráulico.

Cuando es pequeña la *pendiente* de las curvas, una variación del exponente en 0,1, que es la mitad del intervalo de la escala horizontal, produce un efecto máximo sobre el valor de $\Delta\Phi$ y ΔB no superior al 3 ó 4 por 100, y esto so-

lamente en la región próxima a $\eta=1$ y para exponentes próximos a $n=3$. Esto justifica la práctica conveniente de adoptar un valor medio de n para un intervalo de calados, sin precisarse una mayor subdivisión. La forma de las curvas, de débil curvatura, justifica la validez, en la práctica, de la interpolación lineal. En otros términos: en la mayoría de los casos no se precisa recurrir a métodos más prolijos de interpolación gráfica o analítica.

Influencia de los rozamientos.—Mayor es la influencia del rozamiento en la totalidad de los casos pertenecientes al régimen variado. La premisa básica de que las resistencias pasivas en régimen variado son idénticas a las del régimen

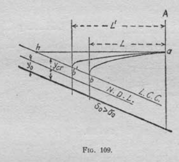


FIG. 109.

uniforme del mismo calado es una aproximación, singularmente incorrecta en aquellos casos especiales de movimiento retardado en que la conversión de la energía cinética juega un papel decisivo. Analíticamente, una *corrección* del factor de resistencias C implica un cambio del coeficiente $\mathfrak{K}$, así como de $\sigma=\frac{g}{C^2}\cdot\frac{p}{b}$ y, por tanto, de $1-\beta$. Los valores de $1-\beta$ influyen particularmente en el caso $s_0>\sigma$. Por este motivo las curvas S_1, S_3 y M_3, que hasta ahora hemos calculado sin parar atención especial en las mayores pérdidas del régimen divergente, deben considerarse como las menos aproximadas.

No obstante, aun con tales limitaciones, los resultados

obtenidos del estudio de las curvas de lámina libre son muy útiles. Por ejemplo, suponiendo en la figura 109 que $a-b$ es una curva S_1, calculada en el artículo 39, una eventual corrección por aumento de resistencias daría lugar a una cuña más larga, tal como la $a-b'$. Pero la curva, siempre, será convexa y estará situada, por tanto, por debajo de $a-h$. $a-b$ y $a-h$ marcan, por consiguiente, los límites entre los que ha de encontrarse la curva.

Además, en la figura 110, suponiendo que $a-c$ y $a-b$ son curvas M_3 y S_3, respectivamente, determinadas conforme se ha indicado en los artículos 38 y 41, si las resistencias fueran mayores, la cantidad primitiva de energía contenida en el régimen a alta cineticidad, en a, se consumiría

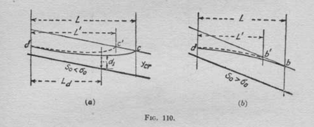


FIG. 110.

más rápidamente. Las curvas, por tanto, serían más cortas, es decir, se transformarían en $a-c'$ y $a-b'$. Las curvas $a-c$ y $a-b$ representan curvas de la máxima longitud posible.

Supongamos, por ejemplo, que hubiera un resalto en la sección d_1, y que la zona anterior al resalto estuviera protegida contra la erosión. La longitud L_d, determinada según se ha expuesto en la Cuestión 2.ª del Ejemplo 12, daría, con un margen de seguridad, la zona en que puede producirse el resalto.

En el caso de curvas descendentes, donde la energía potencial se transforma en cinética, la precisión es más satisfactoria. Sin embargo, aquí como en todo, no debe olvidarse el grado de aproximación inherente a los cálculos del ingeniero ante la presencia, en este caso, de inciertos coefi-

cientes de rozamiento y otras circunstancias complicadas que acompañan al movimiento de los flúidos en las estructuras actuales.

Efecto de curvatura en las proximidades de y_{cr}.—En el artículo 13 se ha recalcado que las ecuaciones del régimen variado solamente son aplicables cuando se cumplen las condiciones de Bélanger de movimiento paralelo. Estas condiciones, evidentemente, no se cumplen en las proximidades de y_{cr}, donde la curvatura es pronunciada. Por tanto, las curvas obtenidas en los párrafos precedentes carecen de precisión en dicha zona. Pero, siendo así, puede observarse, por ejemplo en la figura 103, que aun habiéndose exagerado considerablemente la escala de verticales, la curvatura se hace realmente pronunciada solamente en las *inmediaciones de* y_{cr}. Por tanto, la inexactitud por dicho motivo se limita solamente a un corto trayecto que, en general, representa una insignificante fracción de la longitud total de la curva.

Teniendo esto presente podemos continuar aplicando las ecuaciones al intervalo total de calados, lo que proporciona una visión clara del movimiento y a menudo ofrece, en el punto de calado crítico, una sección conveniente para origen de distancias.

CAPITULO X

CANALES CON SOLERA HORIZONTAL

43. Ecuación del régimen.—En un canal con solera horizontal, con $s_0=0$ (fig. 111), el calado normal es infinito y, por tanto, no puede emplearse y_0 como parámetro. Puede, sin embargo, hallarse una solución sencilla refiriendo el

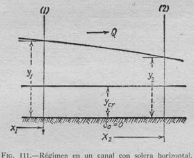


Fig. 111.—Régimen en un canal con solera horizontal.

movimiento al calado crítico. En efecto, en la Ec. [17], haciendo $s_0=0$ y teniendo en cuenta la [20], se tiene:

$$s=\frac{dy}{dx}=\frac{Q^2}{\mathfrak{K}^2}-\frac{Q^2}{g}\cdot\frac{b}{a^3}\cdot\frac{dy}{dx} \qquad [93]$$

Sustituyendo

$$Q^2=\mathfrak{K}^2_{cr}\sigma_{cr},$$

donde σ_{cr} es la pendiente crítica para el calado crítico, que por definición (art. 19) hace uniforme el régimen de Q con y_{cr}, y la Ec. [42]

$$a^3/b=\mathfrak{M}^2(y)=\sigma\,.\,\mathfrak{K}^2/g,$$

se tiene la Ec. [93] en la forma

$$\frac{dy}{dx}\left(1 - \frac{\mathfrak{K}^2_{cr}}{\mathfrak{K}^2}\cdot\frac{\sigma_{cr}}{\sigma}\right) = -\sigma_{cr}\frac{\mathfrak{K}^2_{cr}}{\mathfrak{K}^2} \qquad [94]$$

Multiplicando por $\mathfrak{K}^2/\mathfrak{K}^2_{cr}$ y separando variables:

$$dx\cdot\sigma_{cr} = dy\left(\frac{\sigma_{cr}}{\sigma} - \frac{\mathfrak{K}^2}{\mathfrak{K}^2_{cr}}\right) \qquad [95]$$

Introduciendo el exponente hidráulico

$$(\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_{cr})^2 = (y/y_{cr})^n \qquad [96]$$

y designando por

$$\frac{\sigma_{cr}}{\sigma} = \delta \qquad [97]$$

la Ec. [95] toma la forma:

$$dx\,.\,\sigma_{cr} = [\delta - (y/y_{cr})^n]dy \qquad [98]$$

y designando, como en la Ec. [80],

$$y/y_{cr} = \tau\,;\; dy = y_{cr}d\tau \qquad [99]$$

se obtiene, separando variables:

$$dx = \frac{y_{cr}}{\sigma_{cr}}[\delta\cdot d\tau - \tau^n\,d\tau] \qquad [100]$$

Aplicada a un intervalo de calados entre y_1 e y_2 (fig. 111), que corresponden a $\tau_1 = y_1/y_{cr}$ y $\tau_2 = y_2/y_{cr}$ y suponiendo que $\delta_{1.2}$ es un valor medio de δ en el intervalo, de forma que $\delta_{1.2}(\tau_2 - \tau_1) = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\delta\;d\tau$, la longitud del arco respectivo será:

$$l_{2.1} = x_2 - x_1 = \frac{y_{cr}}{\sigma_{cr}}\left[\delta_{1.2}(\tau_2 - \tau_1) - \frac{\tau_2^{n+1} - \tau_1^{n+1}}{n+1}\right] \qquad [101]$$

Designando

$$\left(\delta\cdot\tau - \frac{\tau^{n+1}}{n+1}\right) = T(y) \qquad [102]$$

la Ec. [101] toma la forma:

$$l_{2.1} = x_2 - x_1 = \frac{y_{cr}}{\sigma_{cr}}[T(y_2) - T(y_1)] \qquad [103]$$

Las Ecs. [101] a [103] juegan, en canales de solera horizontal, un papel análogo al de las Ecs. [84] a [86] en el caso general del régimen variado, solamente que en lugar de manejar el parámetro y_0 se refiere el movimiento al calado crítico. En particular, δ, tal como se ha definido en la Ec. [97], es la relación del parámetro σ_{cr} a la variable σ y reemplaza a β; τ reemplaza a η; e y_{cr}/σ_{cr} sustituye a y_0/σ_0. La integración, por otra parte, es una simple cuadratura, sin que se precisen tablas, pudiendo hacerse los cálculos con ayuda de los logaritmos.

EJEMPLO 16

Un canal, de tipo *B* (fig. 14), de 500 m. de longitud, de solera horizontal comunica dos embalses *A* y *B* (figura 112).

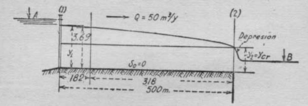


FIG. 112.—Esquema del canal del Ejemplo 116.

Cuestión 1.ª Suponiendo que cuando el nivel en *B* es mínimo fluyen por el canal 50 m³/sg., con formación de depresión hidráulica en la sección 2, determinar la curva de lámina libre. Empléense los coeficientes de Bazin.

El calado crítico. — $\mathfrak{M}_c = Q/\sqrt{g} = 50/\sqrt{9{,}81} = 15{,}95$; al cual corresponde $y_{cr} = y_2 \simeq 2{,}635$ m. Por la Tabla V, $\sigma_{cr} = 26{,}9$ ‰. El exponente hidráulico para el intervalo de 2,635 a 4 m.

$$n = 2\,\frac{\mathrm{Lg}\,\dfrac{2370}{979}}{\mathrm{Lg}\,\dfrac{4}{2{,}635}} \simeq 4{,}2$$

Los valores de $\delta = \sigma_{cr}/\sigma$ para diferentes calados (V. Tabla V y fig. 15)

$$
\begin{array}{llllll}
y = & 2,635 & 2,8 & 3,0 & 3,5 & 4,0 \\
\sigma = & 26,9 & 26,75 & 26,56 & 26,17 & 25,80 \\
\delta = & 1 & 1,005 & 1,01 & 1,03 & 1,04
\end{array}
$$

$$y_{cr}/\sigma_{cr} = 2,635/26,9 \cdot 10^{-4} = 980 \text{ m.}$$

Siguiendo el procedimiento corriente subdividiremos el intervalo de integración. La Ec. [101] aplicada a un intervalo da:

$$l_{2,1} = 980\left[\delta\,(\tau_2 - \tau_1) - \frac{\tau_2^{5,2} - \tau_1^{5,2}}{5,2}\right] = 980\left[\delta \cdot \Delta\,\tau - \Delta\,\frac{\tau^{5,2}}{5,2}\right]$$

Los valores de $\tau^{5,2}/5,2$ se calculan por logaritmos, resumiéndose el proceso en la

Tabla XX

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
y	τ	δ	$\Delta\tau$	$\delta \cdot \Delta\tau$	$\frac{\tau^{5,2}}{5,2}$	$\Delta\frac{\tau^{5,2}}{5,2}$	ΔT	l	L
			–	–		–	+		
2,635	1,00	1,00	......	......	0,192	......	......	......	0,00
			0,06	0,060	......	0,069	0,009	8,82	
2,80	1,06	1,01	......	......	0,261	......	......	......	8,82
			0,08	0,081	......	0,119	0,038	37,24	
3,00	1,14	1,01	......	......	0,380	......	......	......	46,06
			0,19	0,194	......	0,470	0,276	272,28	
3,50	1,33	1,03	......	......	0,850	......	......	......	318,34
			0,19	0,197	......	0,845	0,648	635,04	
4,00	1,52	1,04	......	......	1,695	......	......	......	953,38

Las distancias que figuran en la última columna vienen medidas desde la sección 2. En la figura 113 se representa la curva.

Cuestión 2.ª Determinar el calado en la sección inmediata a la compuerta de la figura 112, a 500 m. de distancia

de la sección 2. La longitud del arco entre la sección 3,50 y (1) es

$$500 - 318 = 182 \text{ m.}$$

De donde

$$182 = 980[T(3,50) - T(y_1)]$$

Por la Tabla XX,

$$T(3,50) = \delta \cdot \tau - \frac{\tau^{6,2}}{5,2} = 1,03 \times 1,33 - 0,850 = 0,520.$$

La cuestión se resuelve hallando el valor de τ que satisfaga

$$T(y_1) = T(3,50) - \frac{182}{980} = 0,520 - 0,185 = 0,335$$

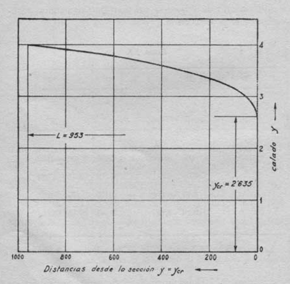


FIG. 113.

La solución de la ecuación

$$T(y_1) = 1{,}03\,\tau - \frac{\tau^{5,2}}{5{,}2} = 0{,}335$$

se obtiene por tanteos:

τ	$1{,}03\,\tau$	$\tau^{5,2}/5{,}2$	T
1,39	1,431	1,066	0,365
1,40	1,442	1,110	0,332

$\tau = 1{,}40$, de donde $y_1 = 1{,}40 \times 2{,}635 = 3{,}69$ m.

EJERCICIO:

Suponiendo un canal, tipo *D*, con solera horizontal de 10.000 m. de longitud, determinar la lámina libre correspondiente a un caudal de 670 m^3/sg. Empléese el coeficiente de G. K. para $s_0 = 0{,}0001$ con $n = 0{,}025$. Exponente hidráulico, $n = 3{,}8$.

PARTE II

APLICACIONES PRACTICAS

Los métodos expuestos en la parte I se aplican a diferentes casos prácticos de ingeniería hidráulica y problemas relacionados con el proyecto de canales. Se verá que el proyecto basado únicamente sobre nociones del régimen uniforme es inadecuado y puede conducir a consecuencias inesperadas e irremediables. Solamente cuando el cálculo se hace considerando el régimen variado se podrá llegar al conocimiento acertado del funcionamiento real del canal, especialmente cuando el caudal o los niveles en sus extremos sufran variación con relación a los supuestos en los cálculos teóricos o cuando los coeficientes de rozamiento no corresponden a los admitidos.

Los capítulos XI y XIV se refieren en particular a canales de pendiente suave ($s_0 < \sigma_0$). *Los canales de pendiente fuerte se tratan por separado en el capítulo XV. El último capítulo se dedica a las curvas de remanso en corrientes naturales.*

Se supone en lo que sigue suficientemente familiarizado al lector con los conceptos básicos y métodos elementales desarrollados en la primera parte de este libro.

CAPITULO XI

GASTO DE UN CANAL

44. Definiciones. Ejemplos.—Un canal de una sección de forma dada tiene una pendiente s_0 (fig. 114) en una

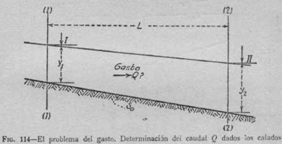


Fig. 114—El problema del gasto. Determinación del caudal Q dados los calados y_1 e y_2.

longitud L comprendida entre las secciones 1 y 2. Los calados y_1 e y_2 en las diferentes secciones varían. El proble-

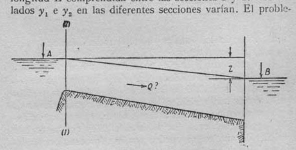


Fig. 115.—Variación del gasto Q en un canal que comunica dos depósitos con niveles variables, A y B.

ma estriba en determinar el caudal que puede conducir el

canal para cada combinación particular de los calados y_1 e y_2.

En la figura 115 un canal pone en comunicación los depósitos *A* y *B*, de nivel variable, y se pide el caudal que circula del depósito *A* al *B* bajo diferentes hipótesis de los niveles. Otro ejemplo es el de la figura 116, de un depósito de regulación *S* situado entre dos canales, uno de los cuales le aporta caudales y el otro los lleva al lugar de utiliza-

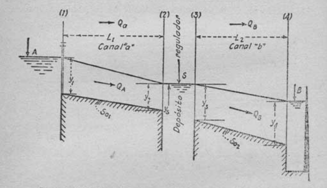


Fig. 116.—Variación del gasto en un sistema con un depósito regulador intercalado entre dos canales.

ción *B*. Según los estados de niveles, la diferencia entre Q_B y Q_A indicará acumulación o débito.

Pero estos son ejemplos para ilustrar la naturaleza de los problemas. En realidad, cualquier canal que ha de llevar caudales sometidos a fluctuaciones o cuyos niveles en los extremos son variables, está sometido a condiciones de régimen variado; y prácticamente, en tales casos, conociendo el gasto del canal bajo las diferentes combinaciones posibles de niveles, se pueden resolver las cuestiones relativas al funcionamiento de tales canales. El problema del gasto es, por tanto, básico. Es análogo al del caudal en el caso del movimiento uniforme y juega el mismo papel en cálculos relativos al régimen variado.

45. Caso de y_1 constante.—Es el caso más sencillo, cuando el nivel en uno de los extremos del canal no varía. Por ejemplo, en la figura 117/I se supone que el calado y_1 permanece constante, mientras que y_2, determinado por el nivel B, varía. La curva de gasto $Q=f(y_2)$ tiene la forma representada en la figura 117/II, siendo puntos característicos de la misma:

1.° *Punto Z*: La línea ab_z es la línea de nivel; $y_{2z}=y_1+s_0L$; el gasto es, evidentemente, $Q=o$.

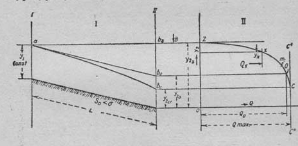


Fig. 117.—Curva de gasto $Q=f(y_2)$ en el caso de $y_1=$const.

2.° *Punto O*: La línea ab_0 es paralela al fondo, $y_2=y_1$, siendo el régimen uniforme, con $Q_0\mathfrak{K}_0\sqrt{s_0}$, donde $\mathfrak{K}_0$ es el coeficiente de gasto para el calado y_1.

3.° *Punto C*: Corresponde al máximo gasto posible Q_{max}. El calado y_{2c} es el crítico, relacionado con el máximo gasto por la expresión $Q^2{}_{max}/g=(a^3/b)_{y=yc}$. La curva ab_c es la lámina libre más baja, del tipo M_2, compatible con el calado y_1. Un descenso mayor del nivel B por debajo de $y_2=y_c$ no afectaría al régimen en el canal ni, por tanto, incrementaría el gasto. El calado en el extremo del canal permanecería igual a y_{cr}, formándose, al desaguar en B, una depresión hidráulica.

Los puntos intermedios relativos al tramo $z-o$ de la curva de gasto corresponden a una curva ascendente del tipo M_1, con caudales $Q \gtrless {0 \atop Q_0}$. Para determinar dicha curva se sigue el procedimiento del Ejemplo 9, artículo 36. Para

un valor escogido Q_x hay que determinar y_{0x} [1]. Con $\eta_{1x}=y_1/y_{0x}$ en la sección 1 se determina $\eta_{2x}=y_2/y_{0x}$ y, por tanto, y_2 mediante la Ec. [91].

$$\Phi(\eta_2) = \frac{Ls_0}{y_0} + \Phi(\eta_1) \qquad [104]$$

Los puntos entre O y C corresponden a una curva descendente del tipo M_2 con $Q \gtrless \begin{matrix} Q_0 \\ Q_{max} \end{matrix}$. El método a seguir es el del Ejemplo 11, artículo 37, similar, en general, al seguido en la zona s-o, sólo que en lugar de la Ec. [104] hay que emplear la [86],

$$\left.\begin{aligned} \Pi(\eta_2) &= \frac{Ls_0}{y_0} + \Pi(\eta_1), \\ \text{donde} \qquad \Pi(\eta) &= \eta - (1-\beta)\, B(\eta), \end{aligned}\right\} \qquad [105]$$

las cuales tienen en cuenta la variación de la energía cinética en el movimiento acelerado.

En la mayoría de los casos prácticos, excepto si el canal es muy corto o la pendiente del fondo excepcionalmente débil, se obtendrá que la porción o-c de la curva de gasto (figura 117/11), entre el caudal normal Q_0 y Q_{max}, es muy pendiente, de forma que Q_{max} excede a Q_0 en una diferencia muy pequeña. Puede aceptarse como regla práctica, sancionada por la experiencia acumulada, que en la mayoría de los casos usuales el caudal Q_0 correspondiente al movimiento uniforme es muy próximo al máximo caudal posible. Por consiguiente, al bajar, por ejemplo, el nivel B en el extremo inferior del canal para incrementar la pendiente superficial no se obtiene un aumento apreciable del gasto, debiendo, por tanto, descartarse este método de *extraer* un caudal adicional.

La razón estriba en el hecho de que la curva M_2 es rela-

---

(1) El calado y_{0x} puede determinarse ya mediante $\mathfrak{K}_{0x}=Q_x/\sqrt{s_0}$ con la curva $\mathfrak{K}=f(y)$, ya tomándolo directamente de una curva de caudales normales (art. 9), que siempre son de gran utilidad en este tipo de problemas.

tivamente corta. En la figura 118 se representa el caso en que la longitud total de la curva db_c entre el calado crítico y el calado $y_d = \frac{0{,}99}{0.999} y_1$ es menor que la longitud L del canal. En tal caso, que ocurre muy frecuentemente, el descenso del nivel B por debajo de $b_0(y_2=y_1)$ nunca se propaga por encima de d y, por tanto, no afecta al régimen del tramo superior del canal. El caudal normal Q_0 es en este caso

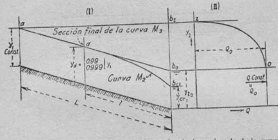


FIG 118.—Curva de gasto de un canal cuya longitud excede a la de la curva de depresión M.

el máximo. La fluctuación del nivel B por debajo de b_0 no influye en absoluto en el gasto. La curva $Q=f(y_2)$ tiene en este caso la forma representada en la figura 118/II.

EJEMPLO 17

Supongamos un canal de tipo A (lámina III) con una longitud de 3 Km., y que y_1 se mantiene constante e igual a 2 m. (fig. 119); $s_0 = 4\ ^{00}/_{00}$; el desnivel total del fondo del canal es $Ls_0 = 1{,}20$ m.

Cuestión 1.ª Suponiendo que y_2 varía, determinar el gasto Q en función de y_2.

Parte z-o de la curva (fig. 117), correspondiente a una curva ascendente *ab'* (fig. 119) del tipo M_1:

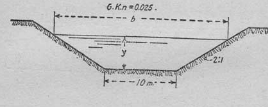
1.º Caudal cero. $Q=0$; $y_{2z} = 2 + 1{,}20 = 3{,}20$ m.

2.º Movimiento uniforme: $y_2 = y_1 = 2$ m.; $\mathfrak{K}_0 = 2\,366$ (véase lámina III):

$$Q_0 = 2\,366 \times \sqrt{4} \times 10^{-2} = 47{,}32 \text{ m}^3/\text{sg}.$$

3.° Puntos intermedios entre O y Z con $y_2 \begin{smallmatrix} > 2 \\ < 3{,}20 \end{smallmatrix}$ y $0 < Q < Q_0 = 47{,}32$ m³/sg. Para distintos valores de y_0 podemos determinar el caudal y el correspondiente valor de y_2 (y, por consiguiente, la relación entre el caudal e y_2) del siguiente modo:

Por ejemplo, para $y_0 = 1$ m., el coeficiente de gasto es



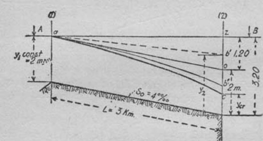


Fig. 119.—Esquema del canal del ejemplo 117.

(lámina III) $K_0 = 715$, de donde $Q = 715 \cdot \sqrt{4} \cdot 10^{-2} = 14{,}30$ metros³/sg.

Con un exponente hidráulico $n = 3{,}6$ se tiene, en la sección 1:

$$\eta_1 = y_1/y_0 = {}^2/_1 = 2{,}00$$

y por las tablas $\Phi(2{,}00) = 1{,}934$. Para

$$s_0 L/y_0 = 1{,}20/1 = 1{,}20$$

se tiene (Ec. [104]):

$$\Phi(\eta_2)=1,20+1,934=3,134$$

Para determinar η_2 procedemos por interpolación rectilínea, obteniendo $\eta_2=3,154$; de donde

$$y_2=\eta_2 y_0=3,154\times 1=3,154 \text{ m.}$$

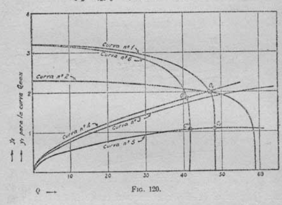


FIG. 120.

Los cálculos correspondientes a otros puntos de la curva se resumen en la Tabla XXI.

TABLA XXI

y_0	$\mathfrak{K}_0$	Q_0	η_1	$\Phi(\eta_1)$	Ls_0/y_0	$\Phi(\eta_2)$	η_2	y_2
2,00	2 366	47,32	—	Movimiento uniforme	—	—	—	2,000
1,75	1 900	38,00	1,14	0,740	0,686	1,426	1,559	2,728
1,50	1 434	28,68	1,33	1,111	0,800	1,911	1,978	2,967
1,25	1 074	21,48	1,60	1,477	0,960	2,437	2,474	3,092
1,00	715	14,30	2,00	1,934	1,200	3,134	3,154	3,154
0,75	439	8,78	2,66	2,635	1,600	4,235	4,244	3,183
0,50	217	4,34	4,00	3,990	2,400	6,390	6,393	3,196
0	—	—	—	Línea de nivel	—	—	—	3,200

En la figura 120 se representa la función $Q=f(y_2)$.

Zona de la curva o-c, correspondiente a la curva descendente ab'' de la figura 119, de tipo M_2.

Para esta zona

$$y_1 \begin{matrix} < y_0 = 2\ \text{m.} \\ > y_{2\,min} = y_{cr} \end{matrix} \quad ; \quad Q \begin{matrix} > Q_0 = 47{,}31\ \text{m/sg.} \\ < Q_{max} \end{matrix}$$

Caudal máximo.—Hay que determinar en primer lugar el valor límite de Q_{max} y el respectivo y_{min}. El calado y_{2min} es el calado crítico correspondiente a Q_{max}. En otros térmi-

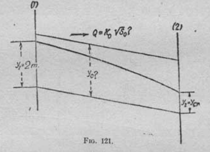


FIG. 121.

nos: Q_{max} es el caudal que en una curva M_2 con $y_2 = y_{cr}$ hace y_1 en la sección (1) igual a 2 m. Para hallar Q_{max} se toma una serie de valores de Q partiendo de $Q_0 = 47{,}32$ metros^3/sg., y haciendo en cada caso $y_2 = y_{cr}$ se determina el correspondiente y_1.

El caudal que hace $y_1 = 2$ m. es Q_{max} (fig. 121). Para el cálculo se sigue, en general, el método expuesto en el ejemplo 11. Los caudales Q elegidos se definen por sus calados normales. En la tabla XXII se resumen los elementos hidráulicos precisos para el cálculo.

TABLA XXII

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
y_0	K_0	$Q = K_0\sqrt{S_0}$	$M_{cr} = Q/\sqrt{g}$	y_{cr}
1,80	1 993	39,86	12,72	1,05
2,00	2 366	47,32	15,10	1,19
2,10	2 601	52,02	16,61	1,26
2,20	2 836	56,72	18,11	1,33

Los valores de $\mathfrak{N}_0$ de la columna (2) se han obtenido de la lámina III por interpolación. Los valores de $\mathfrak{M}(y)$ (col. 4) corresponden al régimen crítico para los caudales de la columna (3). Los calados críticos (col. 5) corresponden a la función $\mathfrak{M}=a\sqrt{a/b}$ de la lámina III.

Los valores de $1-\beta$ en el intervalo de calados y_0-y_{cr} son:

$y=2$ m.: $\sigma=21{,}22\times10^{-4}$; $\beta=s_0/\sigma=4/21{,}22=0{,}188$; $1-\beta=$ $=0{,}812$

$y=1{,}20$: $\sigma=23{,}05\times10^{-4}$; $\beta=s_0/\sigma=4/23{,}05=0{,}173$; $1-\beta=$ $=0{,}827$

Puede emplearse el valor medio $1-\beta=0{,}820$.

Para la sección 2 se tiene: $\eta_2=1{,}26/2{,}10=0{,}600$; con $n=3{,}6$, $B(\eta_2)=0{,}623$; $0{,}820\times0{,}623=0{,}511$; $\Pi(\eta_2)=0{,}600-$ $-0{,}511=0{,}089$.

$$Ls_0/y_0=1{,}20/2{,}10=0{,}571$$

$$\Pi(\eta_1)=\Pi(\eta_2)-\frac{Ls_0}{y_0}=0{,}089-0{,}571=-0{,}482.$$

Para facilitar la obtención de η_1 se puede dibujar la curva (fig. 122) $\Pi(\eta_1)=\eta_1-0{,}820B(\eta_1)$, de acuerdo con la siguiente tabla auxiliar:

η	$B(\eta)$ para $n=3{,}6$	$0.820\ B(\eta)$	$\Pi(\eta)=\eta-0{,}820\,B(\eta)$
0,955	1,385	1,136	0,181
0,960	1,417	1,162	0,202
0,965	1,459	1,196	0,231
0,970	1,501	1,231	0,261
0,975	1,554	1,274	0,299
0,980	1,617	1,326	0,346
0,985	1,699	1,393	0,408
0,990	1,814	1,487	0,497
0,995	2,008	1,646	0,651

Para $y_0=2{,}10$ el valor de η_1 correspondiente a $\Pi(\eta_1)=$ $=-0{,}482$ es $\eta_1=0{,}981$.

1'00
0'99
0'98
0'97
0'96
0'95
η
0'10 0'20 0'30 0'40 0'50 0'60
$\pi = \eta - 0'320\, B(\eta)$

Fig. 122.

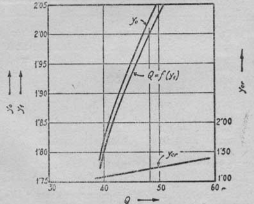


Fig. 123.—Curvas auxiliares para la determinación del caudal máximo en el esquema de canal de la figura 119.

En la Tabla XXIII se condensa el cálculo de otros puntos.

TABLA XXIII

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
y_0	Q	$y_2 = y_{cr}$	η_2	$B(\eta_2)$	$\frac{0{,}820}{B(\eta_2)}$	$\Pi(\eta_2)$	$\frac{Ls_0}{y_0}$	Π_1	η_1	y_1
1,80	39.86	1,05	0,584	0,604	0,495	0,089	0,666	−0,577	0,993	1,787
2,00	47.32	1,19	0,595	0,617	0.506	0,089	0,600	0,511	0,990	1,980
2,10	52,02	1,26	0,600	0,623	0.511	0,089	0,571	0,482	0,989	2,077
2,20	56,72	1.33	0,605	0,629	0,516	0,089	0,545	0,456	0,988	2,174

En la figura 123 se representan en $f(y_1)$ las curvas correspondientes a los valores de Q . y_1 e $y_{cr} = y_2$ (columnas 2, 3 y 11).

El caudal correspondiente a $y_1 = 2$ m. se obtiene $Q_{max} = 48{,}29$ m³/sg. con $y_2 = y_{cr} = 1{,}204$ m.

Puntos intermedios entre Q_0 y Q_{max}.—Puesto que $Q_{max} = 48{,}29$ m³/sg. es muy próximo a $Q_0 = 47{,}32$ (una diferencia de un 2 por 100), hay poco espacio para situar algunos puntos adicionales. No obstante, puede determinarse algún punto más, por ejemplo, el correspondiente a $y_0 = 2{,}015$ m. con $Q = 48$ metros³/sg.

Para este punto los elementos en la sección 1 son:

$$\eta_1 = 2/2{,}015 = 0{,}993 \; ; \; B(\eta_1) = 1{,}930 \; ; \; \Pi(\eta_1) = -0{,}589 \; ;$$

$$Ls_0/y_0 = 1{,}2/2{,}015 = 0{,}595$$

y, por consiguiente:

$$\Pi(\eta_2) = 0{,}595 + (-0{,}589) = 0{,}006.$$

Esta ecuación se verifica para $\eta_2 = 0{,}869$ como se ve en la siguiente tabla auxiliar:

η	$B(\eta)$	$0{,}820\,B(\eta)$	$\Pi(\eta)$
0,86	1,031	0,846	0,014
0,87	1,055	0,865	0,005

y, por tanto, $y_2 = 0{,}869 \times 2{,}015 = 1{,}750$.

Situando este punto y el Q_{max} en la figura 120 se tiene totalmente definida la curva (1) $Q=f(y_2)$.

46. Canales largos y cortos. Efecto de la pendiente del fondo.—La curva de gasto tal como se ha calculado, representada en la figura 120 (curva 1), es típica en canales de longitud *media*. El caudal máximo es ligeramente mayor que Q_0; por otra parte, dentro del intervalo total *o-z* de la curva de remanso, las fluctuaciones de y_2 ejercen una marcada influencia sobre el caudal.

Cuando la longitud del canal aumenta, Q_{max} y Q_0 se aproximan más y más, hasta que, finalmente, como en la

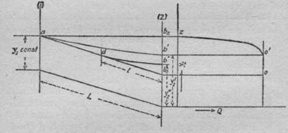


Fig. 124.—Curva de gasto en un canal muy largo.

figura 118, coinciden. Al seguir aumentando la longitud del canal, L puede ser mayor que la longitud l de la curva de remanso correspondiente al calado y''_2. Evidentemente, el régimen en la sección 1 empezará a ser afectado por las variaciones del nivel B siempre y cuando el calado y_2 alcance y sobrepase a un cierto calado y'_2 que hace que la curva $b'a$ tenga la misma longitud del canal. Naturalmente, para todo calado $y_2 < y'_2$ el gasto permanece constante e igual a Q_0. La parte correspondiente de la curva $Q=f(y_2)$ (fig. 124) es una línea vertical *o-o'*. Para determinar y'_2 se hace y_1 en la sección 1 igual a 1,01 ó $1{,}001y_0$ y se calcula el nivel correspondiente en la sección 2.

En canales *cortos*, es evidente que cuanto menor es la longitud L mayor será el exceso de Q_{max} sobre Q_0. En el ejemplo siguiente, que se refiere a un canal idéntico en sec-

ción al del Ejemplo 17, pero más corto, se hace patente la diferencia aludida de la curva de gasto.

EJEMPLO 18

Determinar $Q=f(y_2)$ para el canal del Ejemplo 17 con una longitud $L=800$ m. (fig. 125).

$$Ls_0=800\times 4\times 10^{-4}=0{,}32 \text{ m.};$$

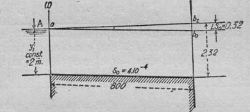


FIG. 125.—Esquema del canal del Ejemplo 118.

por tanto, y_{2z}, correspondiente al caudal $Q=0$, vale

$$y_{2z}=2+0{,}32=2{,}32 \text{ m.}$$

En la Tabla XXIV se especifican los elementos de la porción o-z de la curva. Las tres primeras columnas de dicha tabla son idénticas a las de la XXI.

TABLA XXIV

y_0	Q_0	$\Phi(\eta_1)$	Ls_0/y_0	$\Phi(\eta_2)$	η_2	y_2
2,00	47,32	—— Movimiento	uniforme ——			2,00
1,75	38,00	0,740	0,183	0,923	1,221	2,137
1,50	28,68	1,111	0,213	1,324	1,480	2,220
1,25	21,48	1,477	0,256	1,733	1,819	2,273
1,00	14,30	1,934	0,320	2,254	2,300	2,300
0,75	8,78	2,635	0,427	3,062	3,083	2,312
0,50	4,34	3,990	0,640	4,630	4,637	2,318
0	—— Línea	de nivel ——				2,320

Para el cálculo de la parte de curva *o-c*, correspondiente a las curvas descendentes M_2, supondremos que el valor medio de $1-\beta$ es 0,820. En la Tabla XXV se resumen los cálculos hechos, de acuerdo con la fórmula

$$\Pi(\eta_2) = \frac{Ls_0}{y_0} + \Pi(\eta_1)$$

TABLA XXV

y_0	Q	η_1	$B(\eta_1)$	$0{,}820\,B(\eta_1)$	$\Pi(\eta_1)$	Ls_0/y_0	I	η_2	y_2
2,00	47,32	——— Movimiento uniforme ———							2,30
2,10	52,02	0,953	1,371	1,124	−0,171	0,152	−0,019	0,890	1,87
2,20	56,72	0,910	1,173	0,962	−0,052	0,145	+0,093	0,683	1,50
2,32	62,92	0,862	1,036	0,849	+0,013	0,138	+0,151		

En la última fila no se hace el cálculo de η_2 e y_2 por no existir valores en las tablas que satisfagan la relación $\Pi(\eta) = \eta - 0{,}820B(\eta) = +0{,}151$, ya que el mayor valor *positivo* que puede alcanzar $\Pi(\eta)$ es 0,089. La explicación estriba en que la curva de depresión que correspondería a $y_0 = 2{,}32$ m. y $Q = 62{,}92$ m³/sg. es más corta que la longitud del canal. En otros términos, el caudal $Q = 62{,}92$ m³/sg. es superior a Q_{max}.

Para hallar el valor del caudal máximo, que evidentemente se encuentra entre 56,72 y 62,92 m³/sg., puede aplicarse el procedimiento del párrafo precedente.

TABLA XXVI

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
y_0	Q	$\mathfrak{M}_c = Q/\sqrt{g}$	y_{cr}	$\eta_2 = y_{cr}/y_0$	$B(\eta_2)$	$0{,}820\,B(\eta_2)$	$\Pi(\eta_2)$	Ls_0/y_0	$\Pi(\eta_1)$	η_1	y_1
2,20	56,72	18,1	1,336	0,61	0,635	0,521	9,089	0,145	−0,056	0,912	2,006
2,26	59,82	19,	1.385	0,61				0,141	−0,052	0,910	2.056
2,32	62,92	20,1	1.430	0,61				0,138	−0,049	0,908	2,106

Los valores de y_{cr} de la columna 4 se han tomado de la curva $\mathfrak{M}(y)$ de la lámina III. Es característica de esta si-

tuación la identidad del valor numérico de $\Pi(\eta_2)=\Pi(\eta_{cr})$ para todos los calados críticos, que, tanto en la Tabla XXVI como en la Tabla XXIII, es igual a 0,089. Como se ha indicado antes, éste es el máximo de la expresión $\Pi(\eta)= =\eta-0{,}820\,B(\eta)$ para el valor supuesto de $1-\beta$. Esta cir-

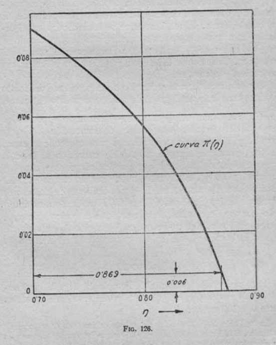


Fig. 126.

cunstancia de ser $\Pi(\eta_{cr})$ constante en un amplio intervalo de calados puede aprovecharse a veces para simplificar el cálculo.

En la figura 126 se representa $\Pi(\eta)=\eta-0{,}820B(\eta)$ para determinar η_1 (col. 11) por los valores de $\Pi(\eta_1)$ (col. 10). Q, y_{cr} e y_1 (cols. 2, 4 y 12) determinan una curva $Q=f(y_1)$, de la que se obtiene el $Q_{máx}$ correspondiente a $y_1=2$ m., así como el valor de $y_2=y_{cr}$.

En la figura 120 se ha dibujado la curva de gasto (curva 2). Se comparan allí ambas curvas $Q=f(y_2)$, una para un canal de 3 Km. y la otra para el de 800 m. En el canal largo Q_{max} excede a Q_0 solamente en un 2 por 100, mientras que en el corto el incremento de caudal llega a un $\sim$ 28 por 100.

Efecto de la pendiente del fondo.—La forma de la curva de gasto depende, evidentemente, de la relación de la longitud L del canal a la de los elementos longitudinales de las curvas de lámina libre. Conforme se ha indicado en el artículo 42, a igualdad de los restantes factores, los elementos longitudinales de las curvas son inversamente proporcionales a s_0. Cuanto más débil es la pendiente, más largas son las curvas y viceversa.

Por este motivo, una reducción de la pendiente del fondo produce un efecto análogo al de un acortamiento del canal.

47. La curva de Q máximo.—El método expuesto en los artículos precedentes para la determinación del Q_{max} para un y_1 dado puede generalizarse para construir la curva de Q_{max} para un margen amplio de condiciones, la cual muestre el caudal máximo que puede fluir por un canal al variar el nivel y_1. Esta curva puede ser un medio auxiliar en multitud de cuestiones. El procedimiento de cálculo es el mismo de las Tablas XXIII y XXVI aplicado a un intervalo extenso de calados. Para una serie de valores de y_0 y Q respectivos se determina y_{1c} en la sección 1, suponiendo que en cada caso y_2 es el calado crítico correspondiente a Q.

Ejemplo 19

Para un canal, como el del Ejemplo 18 (fig. 125), determínese la curva $Q_{max}=f(y_1)$ para un intervalo de caudales entre 0 y 100 m^3/sg.

En la Tabla XXVII el valor del calado crítico (col. 4) se toma de la lámina III. Para los puntos $y_0 \geqslant 1{,}5$ m. se ha aceptado, como en los ejemplos precedentes, el valor medio de $1-\beta=0{,}820$, lo que hace que sean iguales a 0,089 los valores de $\Pi(\eta_{cr})$ y permite emplear la curva $\Pi(\eta_1)$ de la figura 126 para la determinación de η_1.

TABLA XXVII

Cálculos relativos a la curva $Q_{max} = f(y_1)$ del canal, fig. 125, Ejemplo 19

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
y_0	Q	$\mathfrak{M}_{cr} = Q/\sqrt{g}$	$y_{cr} = y_2$	η_2	$B(\eta_2)$	$1-\beta$	$(1-\beta)\times B(\eta_2)$	$\Pi(\eta_2)$	$a_0 L_0/y_0$	$\Pi(\eta_1)$	η_1	y_1
0,50	4,34	1,38	0,26	0,520	0,531	0,873	0,463	0,057	0,640	$\bar{0}$,583	0,989	0,494
1,00	14,30	4,57	0,56	0,560	0,576	0,850	0,490	0,070	0,320	0,250	0,962	0,962
1,50	28,68	9,16	0,88	0,587	0,607				0,213	0,124	0,941	1,411
2,00	47,32	15,10	1,19	0,595	0,617	0,820		0,089	0,160	0,071	0,920	1,840
2,50	70,85	22,60	1,54	0,616	0,638				0,128	0,039	0,903	2,257
3,00	98,81	31,50	1,87	0,623	9,649				0,107	0,018	0,890	2,670

Para los puntos por bajo de $y_0=1{,}5$ m. se han determinado los valores medios de $1-\beta$ tomando en cada caso la pendiente crítica media en la lámina III para el intervalo entre y_0 e y_{cr} y haciendo

$$1-\beta=1-\frac{4\times10^{-4}}{\sigma}$$

La tabla de valores de Q (col. 2) y de y_1 (col. 13) determinan la

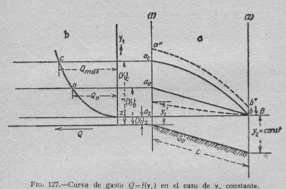


FIG. 127.—Curva de gasto $Q=f(y_1)$ en el caso de y_2 constante.

curva de máximo gasto $Q_{max}=f(y_1)$, que es la número 3 de la figura 120. Esta curva va próxima a la de caudal normal (4) correspondiente a movimiento uniforme, mostrándose que aun en un canal corto el caudal de régimen uniforme se acerca a Q_{max}.

El punto C' de la curva Q_{max} correspondiente a $y_1=2$ m. es idéntico al punto C_2 de la curva de gasto $Q=f(y_2)$. Para completar la figura se ha dibujado también la curva $y_{cr}=y_{2\ min}=f(Q_{max})$. Evidentemente, esta curva, considerada como $y_{2\ min}=f(y_1)$, indica la posición inferior que puede alcanzar el nivel en la sección 2 con el caudal inicial dado y_1 en la sección 1. Es claro que la curva $y_{2\,min}$ ha de cortar a las curvas de gasto $Q=f(y_2)$ en los puntos C_1 y C_2.

48. CASO DE y_2 CONSTANTE.—Se supone ahora que el nivel B, y, por consiguiente, y_2, permanece contante. El nivel variable es el y_1 de la sección 1. Por tanto, los caudales variarán con el calado y_1, siendo la curva, en este caso, $Q=f(y_1)_{y_2=const.}$

Los puntos característicos son:

1.° Línea de nivel $b-a_2$; con $Q=0$ e $(y_1)_z=y_2-s_0L$.

2.° Régimen uniforme $b-a_0$; con $Q=\mathfrak{K}_2\sqrt{s_0}$, donde $\mathfrak{K}_2$ es el coeficiente de gasto para $y_0=y_2$.

3.° Curva de máximo gasto $b-a_c$, compatible con el y_2 dado; Q_{max} es en este caso el caudal crítico correspondiente al y_2 dado; por tanto, $Q_{max}=\mathfrak{M}(y_2)\sqrt{g}$, donde $\mathfrak{M}(y_2)$ es el valor de $a\sqrt{a/b}$ para $y=y_2$.

El calado y_{1c}, correspondiente a Q_{max}, es el punto particular situado sobre la curva de máximo gasto $Q_{max}=f(y_1)$ del artículo precedente. Evidentemente, y_{1c} es el mayor calado posible en la sección 1 compatible con el calado constante dado y_2. Si en tales condiciones subsistiera el nivel B del depósito, la emergencia del movimiento en el canal vendría acompañada de la formación de una curva de depresión.

La curva de gasto $Q=f(y_2)$ tiene la forma representada en la figura 127 b. La porción z-o, con

$$y_1 \begin{matrix} > y_{1z} \\ < y_{10} \end{matrix} \quad \text{y} \quad Q \begin{matrix} > 0 \\ < Q_0 \end{matrix}$$

corresponde a curvas ascendentes del tipo M_1. La porción o-c, con

$$y_1 \begin{matrix} > y_{10} \\ \leqslant y_{1c} \end{matrix} \quad \text{y} \quad Q \begin{matrix} > Q_0 \\ \leqslant Q_{max} \end{matrix}$$

corresponde a curvas de depresión del tipo M_2.

Ejemplo 20

Supongamos (fig. 128) un caso similar al del Ejemplo 17; y, además, que el nivel en la sección 2 se mantiene constante con un calado $y_2=2$ m.

Calcular y dibujar la curva $Q=f(y_1)$.

Los puntos característicos son:

1.° Línea de nivel con $Q=0$, $y_{1z}=2-1{,}20=0{,}80$ m.

2.° Régimen uniforme, con $Q=47{,}32$ m³/sg. para $y_1=2$ m.

3.° Caudal máximo.

De la lámina III se tiene $\mathfrak{M}(y=2 \text{ m.})=34{,}88$; por tanto,

$Q_{max}=34{,}88\sqrt{g}=110$ m³/sg. Para hallar el correspondiente calado normal

$$\mathcal{K}_0=Q_{max}/\sqrt{s_0}=110/\sqrt{4}\cdot 10^{-2}=5\,500$$

al que, según la lámina III, corresponde $y_0=3{,}17$ m.

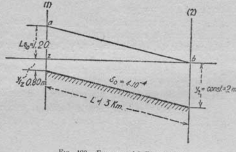


FIG. 128.—Esquema del Ejemplo 20.

Calado y_{1c}.—El valor medio de σ entre $y_2=2$ m. e $y_{1c}=3{,}17$ m. es $\sigma\simeq 20{,}6$, de donde

$$\beta=4/20{,}6=0{,}194\ ;\ 1-\beta=0{,}806\,.$$

Para la sección 2 se tiene:

$$\eta_2=2/3{,}17=0{,}631\ ;\ \mathrm{B}(\eta_2)=0{,}660\ ;$$
$$\Pi(\eta_2)=0{,}631-0{,}806\times 0{,}660=0{,}100\,.$$

Para

$$L_0 s_0/y_0=1{,}2/3{,}17=0{,}379$$
$$\Pi(\eta_1)=0{,}100-0{,}379=-0{,}279\,.$$

que se verifica para $\eta_1=0{,}984$, de donde $y_{1c}=0{,}984\times 3{,}17=$ $=3{,}12$ m.

Puede calcularse un punto intermedio en cada una de las zonas *o-z* y *o-c*.

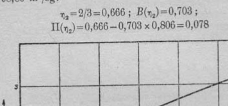
Porción ZO: Curva M_1.—Tomemos $y_0=1$ m.; $Q=$ $=14{,}30$ m³/sg. Para $y_2=2$ m., $\eta_2=2/1=2$; $\Phi(\eta_2)=1{,}934$; $L_0 s_0/y_0=1{,}2$; por tanto:

$$\Phi(\eta_1)=\Phi(\eta_2)-\frac{Ls_0}{y_0}=1{,}934-1{,}2=0{,}734,$$

que corresponde a $\eta_1=1{,}138$, donde $y_1=1{,}138$ m.

Porción OC: *Curva* M_2.—Tomemos $y_0=3$ m.; $Q=$ $=98{,}80$ m³/sg.

$$\tau_2=2/3=0{,}666\ ;\ B(\tau_2)=0{,}703\ ;$$
$$\Pi(\tau_2)=0{,}666-0{,}703\times0{,}806=0{,}078$$



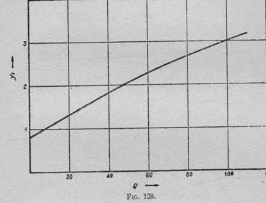


Fig. 129.

Para
$$Ls_0/y_0=0{,}4$$
$$\Pi(\tau_1)=\Pi(\tau_2)-\frac{Ls_0}{y_0}=0{,}078-0{,}400=-0{,}322,$$

que corresponde al valor de $\tau_1=0{,}980$, de donde $y_1=2{,}94$ m.

La curva se representa en la figura 129.

49. $Q=f(y_1, y_2)$. La curva de Q constante.—En el caso general, cuando ambos calados y_1 e y_2 varían, el problema en su sentido más amplio estriba en determinar el caudal que circula para cualquier combinación posible de los calados y_1 e y_2.

Suponiendo dados un cierto par de calados y_1 e y_2, la cuestión se resuelve calculando y dibujando, para uno u otro de los calados dados, una zona de las curvas de caudales $Q=f(y_2)$ o $Q=f(y_1)$, conforme se ha indicado en los párrafos precedentes. En efecto: suponiendo que $y_2>y_1$, se estará en el caso de una curva ascendente (fig. 103 *a*);

el caudal Q es $<Q_0$, que correspondería a $y_0=y_1$; el valor del caudal actual se determina, o bien mediante una curva $Q=f(y_2)$ como en el artículo 45, construída considerando a y_1 constante, o mediante una curva $Q=f(y_1)$, conforme se ha explicado en el artículo 48, construída en la hipótesis de y_2 constante.

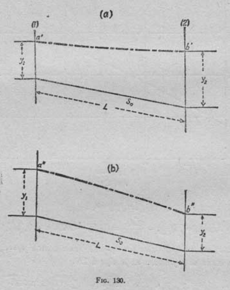


FIG. 130.

Cuando $y_2<y_1$ (fig. 130, *b*), el caudal se encontrará comprendido entre el caudal normal Q_0, correspondiente a $y_1=y_0$, y Q_{max}, correspondiente a $y_2=y_{cr}$. Se comienza probando con una curva descendente M_2, suponiendo que el y_1 dado sea 0,999 ó 0,99 de y_0. Se determina el correspondiente y'_2. Si y'_2 así determinado es $<y_2$ dado, Q_0 es el caudal máximo. Si y'_2 *es* $>y_2$ dado, se construye la porción *o-c* de la curva $Q=f(y_1)$, como en la figura 129, para el valor y_2 dado.

La curva Q=constante.—La curva llamada *de Q=constante* constituye un valioso medio para calcular el caudal en todos los casos posibles.

Supongamos un caudal Q fluyendo por un canal (figura 131). Dicho caudal puede producirse en el canal de infi-

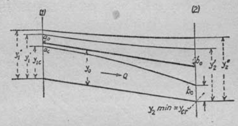


FIG. 131.—Calados recíprocos para Q constante.

nitas maneras, cada una de las cuales viene representada por el par de calados y_1 e y_2, correspondientes a las secciones 1 y 2 extremas de la estructura. Evidentemente, los calados y_1 e y_2 están ligados entre sí mediante una correspondencia *biunívoca*, diciéndose que ambos constituyen un par de calados «recíprocos».

Uno de los pares posibles de calados recíprocos es $y_1 = = y_2 = y_0$, correspondiente al régimen uniforme del caudal Q. Por encima de la recta $a_0 b_0$, correspondiente al régimen uniforme, se tiene y'_2, recíproco con y'_1; y''_2 con y''_1, etc., todas ellas curvas M_1. Por debajo de $a_0 b_0$ los calados recíprocos corresponden a puntos de una curva M_2. La curva $a_c\ b_c$ es la posición más baja de la curva M_2, siendo y_{2min} el calado crítico para el caudal dado; y_{1c} es la ordenada de la curva Q_{max} (v. art. 47), correspondiente al caudal dado Q. Juntos y por separado, $y_{2\,min}$ e y_{1c} son las posiciones de más bajo nivel posible con que puede fluir el caudal dado Q.

Como límite superior de la curva de lámina libre es evidente que cuando los calados y_1 e y_2 crecen, la curva $a-b$ tiende a ser una recta horizontal con lim $(y_2 - y_1)y = \sim s_0 L$.

La relación funcional entre y_1 e y_2 puede representarse

trazando una curva (fig. 132), cada punto de la cual viene determinado por un par de valores recíprocos y_1 e y_2. La curva resultante es la *curva de Q constante*.

Los puntos característicos y rasgos de la curva son los siguientes:

1.° Punto O, con $y_1 = y_2$, correspondiente al régimen uniforme. Se encuentra sobre la primera bisectriz del cua-

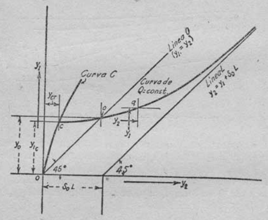


Fig. 132.—La curva de Q constante.

drante. Esta línea es, pues, el lugar de los calados normales al variar el caudal.

2.° Punto C, determinado para cada caudal dado por $y_2 = y_{cr}$ e $y_1 = y_{1c}$. Este punto es el límite inferior de la curva para el caudal dado. El lugar geométrico del mismo al variar Q es la línea C, lugar de los calados críticos, cuyas ordenadas son las y_{1c} (art. 47).

3.° El límite superior, determinado por $y_2 - y_1 = s_0 L$ es una línea recta (línea L) paralela a la bisectriz, a una distancia del origen, según la horizontal, de $s_0 L$. Esta línea límite es asíntota de la curva en cuestión.

Dibujando una serie de curvas Q_{const} para diferentes caudales se obtiene un ábaco que resume todo régimen que

puede producirse en un canal dado en cualquier combinación posible de niveles (fig. 133). Las curvas dibujadas para los diferentes Q son congruentes, sin cortarse entre sí. Cada punto del plano (fig. 133) determina un caudal Q y sólo uno determinado por la curva Q que pasa por él.

EJEMPLO 21

Cuestión 1.ª Suponiendo el canal del Ejemplo 18 (tipo A; longitud=800 m.), determinar la curva Q_{const} para $Q=47{,}32$ m³/sg. correspondiente a $y_0=2$ m.

Para el punto O se tiene $y_1=y_2=2$ m. Para el punto C (V. Tabla XXVII): $y_2=y_{cr}=1{,}19$ m.; $y_f=y_{1c}=1{,}84$ m.

Para la porción correspondiente a curvas ascendentes (M_1) se empleará la fórmula

$$\Phi(\eta_1)=\Phi(\eta_2)-\frac{Ls_0}{y_0}=\Phi(\eta_2)-0{,}160.$$

Para la porción correspondiente a curvas descendentes (M_2) se empleará:

$$\Pi(\eta_1)=\Pi(\eta_2)-0{,}160.$$

En la Tabla XXVIII se detalla el cálculo, con $n=3{,}6$ y $1-\beta=0{,}820$.

TABLA XXVIII

(1) Curvas ascendentes M_1. ($y_2>2$ m.)

η_2	y_2	$\Phi(\eta_2)$	$\Phi(\eta_1)$	η_1	y_1
1,00	Movimiento uniforme				2,00
1,05	2,10	0,394	0,234	1,029	2,06
1,10	2,20	0,620	0,460	1,062	2,12
1,20	2,40	0,880	0,720	1,131	2,26
1,35	2,70	1,141	0,981	1,252	2,50
1,50	3,00	1,351	1,191	1,384	2,77
1,75	3,50	1,655	1,495	1,615	3,23
2,00	4,00	1,934	1,774	1,851	3,70

TABLA XXVIII (Continuación)

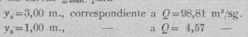
(2) Curvas descendentes M_2. ($y_2<2$ m.)

η_2	y_2	$B(\eta_2)$	$0{,}820\,B(\eta_2)$	$\Pi(\eta_2)$	$\Pi(\eta_1)$	η_1	y_1
0,9	1,80	1,140	0,935	−0,035	−0,195	0,959	1,92
0,8	1,60	0.907	0,744	+0,056	−0,104	0,935	1,87
0,6	1,20	0,623	0,511	+0,089	−0,071	0,920	1,84

En la figura 133 se dibuja la curva (curva 1).

La línea L, paralela a la O, está a la distancia horizontal de $Ls_0 = 0{,}32$ m.

Cuestión 2.ª Como adición a la anterior, calcular y dibujar las curvas $Q_{const.}$ para



$y_0 = 3{,}00$ m., correspondiente a $Q = 98{,}81$ m³/sg.
$y_0 = 1{,}00$ m., — a $Q = 4{,}57$ —
$y_0 = 0{,}50$ m., — a $Q = 1{,}38$ —

FIG. 133.

Los puntos de corte con la línea O son $y_1 = y_2 = y_0$.

Los puntos de la curva C pueden tomarse de la Tabla XXVII:

$y_0 = 3{,}00$ m.; $y_2 = y_{cr} = 1{,}87$; $y_1 = y_c = 2{,}67$
$y_0 = 1{,}00$ m.; $y_2 = y_{cr} = 0{,}56$; $y_1 = y_c = 0{,}962$
$y_0 = 0{,}50$ m.; $y_2 = y_{cr} = 0{,}26$; $y_1 = y_c = 0{,}494$

Para el cálculo de la zona correspondiente a las curvas ascendentes con $y_2 > y_1$ pueden emplearse series de valores de η_2 y $\Phi(\eta_2)$ como en la Tabla XXVIII, siguiéndose idéntico proceso que allí, como se resume en la

TABLA XXIX

η_2	$\Phi(\eta_2)$	$y_0=3;\ Ls_0/y_0=0,107$				$y_0=1;\ Ls_0/y_0=0,320$				$y_0=0,50;\ Ls_0/y_0=0,640$			
		y_2	$\Phi(\eta_1)$	η_1	y_1	y_1	$\Phi(\eta_1)$	η_1	y_1	y_2	$\Phi(\eta_1)$	η_1	y_1
1,10	0,620	3,30	0,513	1,073	3,22	1,10	0,300	1,037	1,04	0,55			
1,20	0,880	3,60	0,773	1,154	3,46	1,20	0,560	1,084	1,08	0,60	0,240	1,030	0,51
1,35	1,141	4,05	1,034	1,262	3,85	1,35	0,821	1,183	1,18	0,67	0,501	1,070	0,53
1,50	1,351	.....	......	......	.....	1,50	1,031	1,280	1,28	0,75	0,711	1,130	0,56
2,00	1,934	.....	......	......	.....	2,00	1,614	1,715	1,71	1,00	1,294	[illegible]7	0,73
3,00	2,978	.....	......	......	.....	3,00	2,658	2,687	2,69	1,50	2,338	2,379	1,18
5,00	4,994	.....	......	......	.....	5,00	4,674	4,681	4,68	2,50	4,354	4,362	2,18

La parte correspondiente a curvas descendentes (M_2) se calcula en la Tabla XXX. Las curvas se dibujan en la figura 133.

Curvas Q_{const} para canales largos y cortos.—Seguidamente hacemos la comparación de la forma de las curvas correspondientes a una misma sección y caudal, pero para canales de longitudes diferentes.

EJEMPLO 22

Determínese la curva Q_{const} para $y_0=2$ m. en el canal del Ejemplo 21, supuesta una longitud $L=3$ Km. La curva, designada por curva 2, se dibuja en la figura 134, mientras que la curva 1 representa el caso de $L=800$ m. Los puntos O de ambas curvas coinciden. El punto C de la curva 2 se toma de la Tabla XXIII, es decir,

$$y_{2c}=y_{cr}=1{,}19\ ;\ y_1=y_{c1}=1{,}98.$$

En vista de la aproximación que existe entre y_{1c} e y_0 no se han calculado más puntos en la zona OC de la curva.

La zona O-L se calcula por la fórmula

$$\Phi(\eta_1)=\Phi(\eta_2)-\frac{1.2}{2}=\Phi(\eta_2)-0{,}600$$

como se resume en la Tabla XXXI.

TABLA XXX

Los valores medios de $1-\beta$ se toman de la Tabla XXVII; para valores de η_2 y $B(\eta_2)$, véase Tabla XXVIII

η_2	$B(\eta_2)$	$y_0=3$; $La_0/y_0=0{,}107$; $1-\beta=0{,}820$						$y_0=1$; $La_0/y_0=0{,}820$; $1-\beta=0{,}850$						$y_0=0{,}50$; $La_0/y_0=0{,}640$; $1-\beta=0{,}873$					
		y_2	$0{,}820 \times B(\eta_2)$	$\Pi(\eta_2)$	$\Pi(\eta_1)$	η_1	y_1	y_2	$0{,}850 \times B(\eta_2)$	$\Pi(\eta_2)$	$\Pi(\eta_1)$	η_1	y_1	y_2	$0{,}873 \times B(\eta_2)$	$\Pi(\eta_2)$	$\Pi(\eta_1)$	η_1	y_1
0,9	1,140	2,7	0,935	−0,035	−0,142	0,945	2,83	0,9	0,969	−0,069	−0,389	0,982	0,98	0,45	0,995	−0,095	−0,735	0,993	0,50
0,8	0,907	2,4	0,744	+0,056	0,051	0,910	2,73	0,8	0,771	+0,029	0,291	0,968	0,97	0,40	0,792	+0,008	0,632	0,991	0,49
0,6	0,623	1,8	0,511	0,089	0,018	0,890	2,67	0,6	0,529	0,071	0,249	0,962	0,96	0,30	0,544	0,056	0,584	0,990	0,49
Punto C (Tabla XVII)		1,87					2,67	0,56					0,96	0,76					0,49

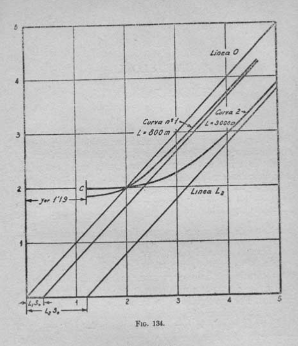


Fig. 134.

TABLA XXXI

η_2	y_2	$\Phi(\eta_2)$	$\Phi(\eta_1)$	η_1	y_1
1,10	2,20	0,620	0.020	1,026	2,052
1,20	2.40	0,880	0,280	1.035	2,070
1,35	2,70	1,141	0.541	1,080	2,160
1,50	3,00	1,351	0,751	1.144	2,288
1,75	3.50	1,655	1.055	1,295	2,590
2,00	4.00	1,934	1,334	1.487	2,974
2,50	5,00	2,454	1,864	1,936	3,872

CAPITULO XII

EMBOCADURAS

50. Fenómenos locales en los extremos del canal. En el capítulo precedente se han establecido las relaciones entre el caudal Q y los calados y_1 e y_2 en los extremos del canal sin tener en cuenta los fenómenos que acompañan a la entrada o salida del agua de éste.

Salida.—Cuando un canal, como en la figura 135, desagua en un depósito, parece que debía existir una cierta «ganancia» de nivel $\Delta y_B = y_B - y_2$ originada por la «recuperación» de al menos una parte de la altura cinética $\frac{v^2}{2g}$ que lleva el agua al abandonar el canal. La observación enseña, sin embargo, que tal recuperación es ilusoria; en otros términos: bajo circunstancias normales la energía cinética se disipa totalmente en rozamientos internos y remolinos. Por consiguiente, en la práctica puede despreciarse el Δy_B y tomarse y_B igual a y_2 (fig. 136) (1).

Entrada regulada por una compuerta.—La figura 138 representa una compuerta de toma que establece el calado y_1. En este caso, el calado y_1, que se ha considerado en el capítulo precedente, es el existente detrás de la compuerta. La longitud del canal L que figura en los cálculos debe contarse desde la cara de aguas abajo de la compuerta, descontando el corto trayecto en que se estabiliza el régimen. Habrá una diferencia de nivel $\Delta y_A = y_A - y_1$ que depende del caudal y apertura de la compuerta y puede ser mantenida a voluntad, pero no tiene relación con el régimen variado en el canal.

---

(1) Esta regla sencilla puede aplicarse a todos los casos, excepto cuando el desagüe viene acompañado de una depresión hidráulica (figura 137) con $y_2 = y_{cr}$ e $y_B < y_{cr}$. En este caso, como ya se ha mencionado, el calado $y_2 = y_{cr}$ se mantiene como calado mínimo independiente de la posición del nivel B.

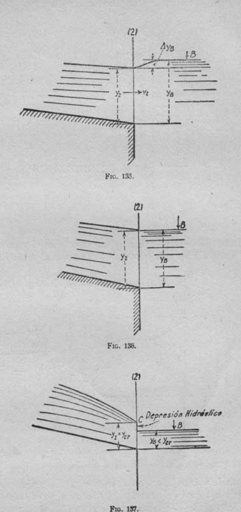


Fig. 135.

Fig. 136.

Fig. 137.

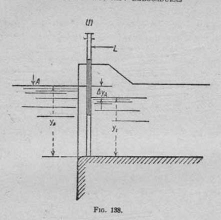


FIG. 138.

Toma libre.—Un caso muy interesante es el representado en la figura 139, donde se supone que el agua fluye

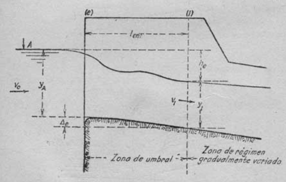


FIG. 139.—Toma libre en un canal.

libremente al canal. Las resistencias y pérdidas determinadas por la forma del umbral, paredes y, a veces también, pilas intermedias son relativamente pequeñas, de forma que

puede considerarse el movimiento como «sin obstrucción». La mayor parte de la pérdida de altura a la entrada h_e se invierte en creación de velocidad.

En este caso el régimen del canal está relacionado con los fenómenos a la entrada. A cada caudal Q, determinado por los calados recíprocos y_1 e y_2 (fig. 140), corresponde un valor definido de h_e y, por tanto, un nivel $y_o = y_1 + h_e$, de forma que y_o, y_1 e y_2 están ligados entre sí funcionalmente.

En la mayoría de los casos prácticos es un dato el ca-

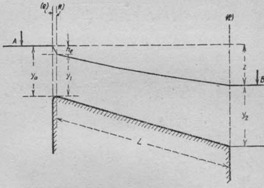


FIG. 140.—La pérdida de altura h_e a la entrada de un canal.

lado y_o determinado por el nivel A antes de la toma. En relación con el problema tratado en el Ejemplo 17, sería el nivel A del depósito alimentador el que permanecería constante, estribando el problema en determinar el caudal en el sistema en función del nivel variable B.

Siempre que la velocidad en el canal sea apreciable y la longitud del mismo no demasiado grande, la pérdida h_e puede constituir una parte sustancial de la pérdida total de nivel Z (fig. 140) y no se debe prescindir de ella.

La entrada libre, enlazada funcionalmente con el régimen variado en el canal, constituye el tema de los artículos que siguen.

51. Evaluación de la pérdida de altura a la entrada. Zona de toma.—La alimentación de un canal de pendiente suave crea una *zona de toma* (fig. 139), que se localiza en una superficie libre ondulada. La sección 1, con el calado y_1 y velocidad v_1, se supone esquemáticamente frontera entre la zona de toma y la zona de régimen gradualmente variado (paralelo). En la zona de toma puede evaluarse el régimen por la sencilla relación

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \varphi \sqrt{2g\left(h_e + \frac{v_0^2}{2g}\right)} \\ Q &= v_1 a_1 = a_1 \varphi \sqrt{2g\left(h_e + \frac{v_0^2}{2g}\right)} \end{aligned}\right\} \qquad [106$$

donde v_0 es la velocidad de llegada y φ el coeficiente de velocidad que involucra las pérdidas entre Δ y la sección 1; a_1 es la sección mojada en 1, correspondiente al calado y_1.

Despreciando $v_0^2/2g$ que generalmente es pequeño, la relación toma la forma:

$$\left.\begin{aligned} h_e &= \frac{1}{\varphi^2}\frac{v_1^2}{2g} = \frac{1}{\varphi^2}\frac{Q^2}{2ga_1^2} \\ \text{ó} \quad h_e &= (1+\zeta)\frac{v_1^2}{2g} = (1+\zeta)\frac{Q^2}{2ga_1^2} \end{aligned}\right\} \qquad [107]$$

donde $\zeta = \dfrac{1}{\varphi^2} - 1$ es el coeficiente de «resistencia».

Los valores φ y ζ dependen de la configuración y dimensiones de la estructura de toma y se suelen estudiar en los tratados en el título relativo a *movimiento a través de orificios* (1). La relación entre el coeficiente de velocidad φ y el factor de resistencia $1+\zeta=1/\varphi^2$ es:

$\varphi = 1$	0,95	0,926	0,90	0,875	0,85	0,815
$1+\zeta = 1$	1,11	1,17	1,23	1,31	1,39	1,50

En los ejemplos que siguen supondremos un valor

(1) Más datos valiosos de las pérdidas en las estructuras de toma se dan por Hinds, *Trans.* A.S.C.E. Vol. 92, pág. 1422, 1928.

medio correspondiente a una toma bien ejecutada de $\frac{1}{\varphi^2}=1+\zeta=1,25$. En la lámina VII se representa la curva $h_e=1,25\frac{v_1^2}{2g}$.

La curva de caudales de entrada.—Para un canal dado (fig. 141), suponiendo que y_a permanece constante, y despreciando la pequeña depresión posible del fondo del canal Δ_{ent} dentro de la zona de toma (fig. 139) de forma que $y_1=y_a-h_e$, se tiene:

$$Q=a_1v_1=a_1\varphi\sqrt{2gh_e}=a_1\varphi\sqrt{2g(y_a-y_1)} \quad [108]$$

Representando $Q=f(y_1)$, según la Ec. [108], se obtiene la curva de caudales de entrada, esencial para la resolución de problemas de régimen variado en que se toman en consideración las circunstancias a la entrada del canal.

EJEMPLO 23

Calcular y dibujar la curva de caudales de entrada para un canal del tipo *A*, con $y_a=2$ m. empleando $1/\varphi^2=1,25$.

TABLA XXXII

y_1	$h_e=2-y_1$	a_1	v_1	Q
1,99	0,01	27,820	0,40	11,13
1,98	0,02	27,641	0,56	15,48
1,95	0,05	27,105	0,89	24,12
1,90	0,10	26,220	1,25	32,77
1,80	0,20	24,480	1,77	43,33

Las velocidades en la columna 4 se han calculado por la fórmula

$$v_1=\sqrt{\frac{1}{1,25}2g\,h_e}$$

En la figura 142 se representa la curva Q_{ent} (núm. 1).

52. MOVIMIENTO UNIFORME (fig. 143).—Dado y_a se determina el calado y_1 y el caudal en movimiento unifor-

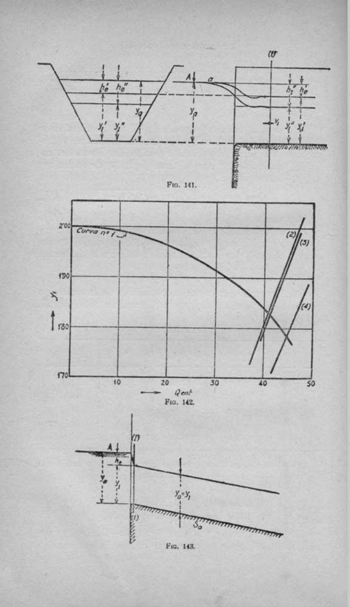


FIG. 141.

FIG. 142.

FIG. 143.

me. Evidentemente, en régimen uniforme $y_1 = y_0$. El caudal Q_{ent}, correspondiente a y_1 (Ec. [108]), debe ser igual a $Q_0 = \mathfrak{K}_1 \sqrt{s_0}$, que se produce en régimen uniforme con el calado normal y_1. El problema se resuelve (fig. 144) hallando la intersección de la curva de gasto normal $Q_0 = \mathfrak{K}_0 \sqrt{s_0}$ y la Q_{ent} consideradas ambas como funciones de y_1.

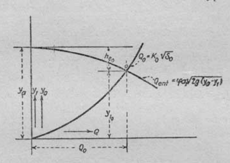


FIG. 144.—Determinación del régimen normal en un canal con toma libre.

EJEMPLO 24

Determinar el caudal Q_0 y el calado normal en régimen uniforme en un canal de tipo A (lámina III) suponiendo que $y_a = 2$ m. y que las condiciones de toma son las del Ejemplo 23.

Para resolver el problema se dibuja en la figura 142 la posición de curva $Q_0 = \mathfrak{K}_0 \sqrt{s_0}$ (curva 2) a partir de $y_0 = 2$ m. hacia abajo, empleando para ello los datos de la Tabla XXI o sea:

y_0	2	1,75	1,50	1,25	1
Q_0	47,32	38,00	28,68	21,48	14,30

obteniéndose, como punto de intersección, $y_1 = y_0 = 1{,}830$ m., $h_e = 0{,}17$ m. El caudal normal es $Q_0 = 41$ m³/sg.

El caudal máximo.—El mismo procedimiento se aplica a la determinación del caudal máximo.

EJEMPLO 25

Supongamos también ahora un canal tipo *A*, con $y_a =$ $=$ const $= 2$ m. y $1/\varphi^2 = 1{,}25$.

Determínese el máximo caudal posible para longitudes de canal de 3 Km. y 800 m., respectivamente. El problema se resuelve dibujando en la figura 142 las posiciones respectivas de la curva Q_{max}. Los elementos precisos los tomamos de la curva $Q_{max} = f(y_1)$ para $L = 3$ Km., Tabla XXIII. La curva se designa en la figura 142 como curva 3.

Para la curva relativa a $L = 800$ m. se utiliza la Tabla XXVII. La curva se designa por el núm. 4.

Los puntos de intersección dan:

Para $L = 3$ Km.:

$$Q_{max} = 41{,}3 \text{ m}^3/\text{sg.}; \; y_1 = 1{,}826 \text{ m.}; \; h_e = 0{,}174 \text{ m};$$
$$y_2 = y_{cr} = 1{,}08 \text{ m.}$$

Para $L = 800$ m.:

$$Q_{max} = 44{,}8 \text{ m}^3/\text{sg.}; \; y_1 = 1{,}784 \text{ m.}; \; h_e = 0{,}216 \text{ m.};$$
$$y_2 = y_{cr} = 1{,}15 \text{ m.}$$

53. LA CURVA DE GASTO $Q = f(y_2)$.—En el caso de y_a constante los puntos característicos de la curva $Q = f(y_2) y_{a=const}$ (compárese con el art. 45 y fig. 117), son:

1.° El punto *Z*, con $Q = 0$ e $y_{2z} = y_a + Ls_0$.

2.° Los puntos *O* y *C* correspondientes, respectivamente, a régimen uniforme y a Q_{max}, determinados como en la figura 142. Para el cálculo de puntos intermedios, de la zona *o-c* o la *o-z* de la curva, el procedimiento, en general, es análogo al del artículo 45, excepto que en lugar de emplear un valor constante de y_1 en la determinación de $\eta_1' =$ $= y_1/y_0$ en la columna 4 de la Tabla XXI, el valor de y_1 es variable. Para cada caudal *Q* (correspondiente al valor de y_1 escogido) se toma el y_1 respectivo de la curva de caudales de entrada (art. 51); con esto los correspondientes η_2 e $y_2 = \eta_2 y_0$ se hallan del mismo modo que en el Ejemplo 17.

EJEMPLO 26

En el caso del Ejemplo 17 supongamos que el calado que permanece constante es $y_a = 2$ m. Determinar la curva de gasto $Q = f(y_2)$.

Los puntos característicos son:

1.° Punto cero: $Q=0$; $y_2=2+1,2=3,2$ m.
2.° Punto O (movimiento uniforme) del Ejemplo 24:

$$Q=41 \text{ m}^3/\text{sg.}; \; y_2=1,83 \text{ m.}$$

3.° Punto C (máximo gasto), del Ejemplo 25:

$$Q=41,3\text{m}^3/\text{sg.}; \; y_2=y_{cr}=1,08 \text{ m.}$$

Como ejemplo de determinación de un punto intermedio tomamos $y_0=1,5$ m. con $Q=28,68$ m³/sg. (véase Tabla XXI).

De la curva Q_{cst} (fig. 142) para $Q=28,68$ m³/sg. $y_1=1,924$ y, entonces, para la sección 1:

$$\eta_1=1,924/1,5=1,282; \quad \Phi(\eta_1)=1,033.$$

Para $Ls_0/y_0=0,800$:

$$\Phi(\eta_2)=\Phi(\eta_1)+\frac{Ls_0}{y_0}=1,033+0,800=1,833,$$

de donde

$$\eta_2=1,908 \text{ y, por tanto, } y_2=1,908\times1,50=2,860 \text{ m.}$$

En la Tabla XXXIII se resumen los cálculos de otros puntos.

TABLA XXXIII

y_0	Q_0	y_1	η_1	$\Phi(\eta_1)$	Ls_0/y_0	$\Phi(\eta_2)$	η_2	y_2
Régimen uniforme								
1,75	38,00	1,850	1,060	0,452	0,686	1,138	1,348	2,355
1,50	28,68	1,942	1,282	1,033	0,800	1,833	1,908	2,860
1,25	21,48	1,960	1,570	1,439	0,961	2,400	2,438	3,042
1,00	14,30	1,983	1,983	1,915	1,200	3,115	3,135	3,135

En la figura 120 se representa la curva, designándola por el número 6.

Caso de y_2 constante.—Este caso es particularmente sencillo. Supongamos una curva $Q=f(y_1)y_{2\,const}$ como la de la figura 127. Para determinar el valor de y_a para un caudal

cualquiera basta simplemente con añadir al valor respectivo de y_1 la correspondiente altura de entrada

$$h_e = \frac{1}{\varphi^2} \frac{Q^2}{2ga_1^2}$$

donde a_1 es la sección mojada correspondiente a y_1.

Curva Q constante.—Lo mismo se aplica al caso de una curva Q_{const}. Si C_1-O-L (fig. 145) es la curva Q_{const}, similar

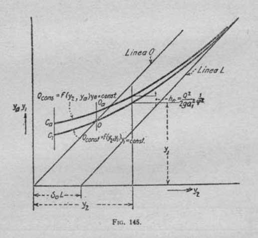


FIG. 145.

a la de la figura 132 que representa la relación entre y_2 e y_1, la curva $f(y_2, y_a)$ se obtiene sumando a la ordenada y_1 de la curva $f(y_2, y_1)$ el valor de h_e.

EJEMPLO 27

Refiriéndonos al Ejemplo 22 y como adición a la curva Q_{const} $f(y_1, y_2)$ para $Q = 47{,}32$ m³/sg. ($y_0 = 2$ m., trazada en la figura 134 como curva 2), calcular y representar la curva Q_{const} como $f(y_a, y_2)$ suponiendo $1/\varphi^2 = 1{,}25$. Para construir la Tabla XXXIV se toman los valores de y_1 e y_2 de la Tabla XXXI. Las velocidades $v_1 = 47{,}32/a_1$ se obtienen divi-

diendo el caudal constante por la sección mojada respectiva correspondiente a y_1. Los valores de h_e se toman de la lámina VII.

En la figura 134 se dibuja la curva (curva 3).

TABLA XXXIV

y_2	y_1	v_1	h_e	$y_a = y_1 + h_e$
2,20	2,052	1,64	0,172	2,224
2,40	2,070	1,62	0,167	2,237
2,70	2,160	1,57	0,156	2,316
3,00	2,288	1,42	0,129	2,417
3,50	2,590	1,20	0,092	2,682
4,00	2,974	1,00	0,064	3,038

CAPITULO XIII

GASTO DE UN CANAL CON SOLERA HORIZONTAL

54. Procedimientos de cálculo.—El método expuesto en el capítulo precedente es aplicable para la determinación del gasto de un canal con solera horizontal ($s_0=0$). Las ecuaciones son las obtenidas en el capítulo X. Refiriendo el movimiento, para cada Q, al calado crítico correspondiente, y con las notaciones de la figura 146, las ecuaciones en este caso serán (V. Ecs. [99] a [103]:

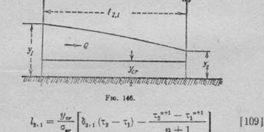


Fig. 146.

$$l_{2,1} = \frac{y_{cr}}{\sigma_{cr}}\left[\delta_{2,1}(\tau_2 - \tau_1) - \frac{\tau_2^{n+1} - \tau_1^{n+1}}{n+1}\right] \qquad [109]$$

donde

$$\tau = y/y_{cr} \text{ y } \delta = \sigma_{cr}/\sigma.$$

Además, haciendo

$$T(\tau) = \delta \cdot \tau - \frac{\tau^{n+1}}{n+1} \qquad [110]$$

la Ec. [109] se convierte en:

$$l_{2,1} = \frac{y_{cr}}{\sigma_{cr}}\left[T(\tau_2) - T(\tau_1)\right] \qquad [111]$$

La Ec. [111], de forma más sencilla, puede emplearse ventajosamente cuando la sección del canal sea tal que el

valor de σ permanezca sensiblemente constante para todo el intervalo de calados. En tal caso (V. Ejemp. 16) puede emplearse un valor medio sencillo de ∂.

Pero cuando ∂ varía substancialmente debe emplearse la Ec. [109]. Se obtiene, entonces, que el término $\partial_{2.1}(\tau_2-\tau_1)$ ejerce un efecto considerable, especialmente para calados próximos a y_{cr}. Debe, por tanto, tenerse especial cuidado en calcular $\partial_{2.1}$ con suficiente precisión.

Como se ha indicado en el artículo 43 será, generalmente, suficiente con tomar como valor de $\partial_{2.1}$ la media aritmética

$$\left(\partial_{2.1}=\frac{\partial_1+\partial_2}{2}\right)$$

de los dos calados contiguos. Pero en la resolución de la Ec. [109] conviene tener presente que ∂_1 y ∂_2 varían con τ_1 y τ_2, lo que habrá de tenerse en cuenta.

La Ec. [109] se resuelve por tanteos sucesivos. Los cálculos se simplifican reduciendo el problema al de determinar la distancia entre los dos calados supuestos. Aclararemos esto con un ejemplo.

EJEMPLO 28

Supongamos (fig. 147) un canal con solera horizontal que pone en comunicación dos depósitos distantes $L=1\,300$

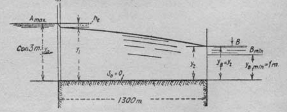


FIG. 147.—Esquema del Ejemplo 28.

metros. La sección y demás elementos del canal son del tipo *D* (lámina V). Según las circunstancias, la corriente

se establecerá de A a B o en dirección opuesta. Supongamos que el nivel máximo en los depósitos corresponde a $y=3$ m. y que el mínimo es 1 m. Los dispositivos de toma son tales que $1/\varphi^2=1{,}25$.

Cuestión: Determinar la curva de gasto $Q=f(y_2)$ suponiendo que y_a se mantiene constante e igual a 3 m.

La curva de gasto (fig. 148) tiene solamente dos puntos característicos: (1) El punto cero Z con $y_2=y_a$, y (2) el punto C de caudal máximo con $y_{2c}=y_{cr}$. El descenso de y_B

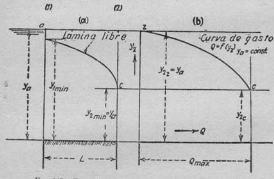


FIG. 148.—Curva de gasto de un canal con solera horizontal.

por debajo de y_{2c} no afecta al régimen del canal. La curva a-c (fig. 148 a) corresponde a la posición más baja posible de la lámina. Todos los puntos intermedios entre Z y C corresponden a régimen con curva descendente del tipo M_2.

Preliminares.—Previamente calcularemos:

1.° La curva de caudales de entrada $Q_{ent}=f(y_1)$ para un canal de tipo D con y_a=const=3 m., la cual se representa en la figura 149 designada con el núm. 1.

h_c	y_1	v_1	a_1	$Q = a_1 v_1$
0,01	2,99	0,396	25,370	10,04652
0,02	2,98	0,560	25,241	14,1350
0,05	2,95	0,886	24,854	22,0206
0,10	2,90	1,252	24,215	30,3172
0,15	2,85	1,534	23,584	36,1778
0,20	2,80	1,772	22,960	40,6851
0,25	2,75	1,980	22,344	44,2411
0,30	2,70	2,170	21,735	47,1649
0,40	2,60	2,505	20,540	51,4527
0,60	2,40	3,068	18,240	55,9603
0,80	2,20	3,543	16,060	56,9006
1,00	2,00		14,000	

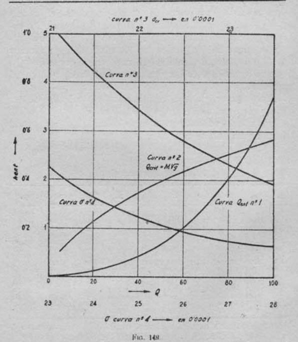


Fig. 149

2.° La curva de caudales críticos $Q_{cr}=f(y_{cr})$, representada en la figura 149 (núm. 2).

3.° La curva de pendiente crítica $\sigma=f(y)$ (fig. 149, números 3 y 4).

Los elementos de las curvas se toman de la lámina V, con pocas complicaciones.

Por conveniencia se ha dibujado cada trozo de la curva σ en una escala diferente. El exponente hidráulico tomado es $n=3,80$.

El caudal máximo.—Para determinar el punto C, con $Q=Q_{max}$ e $y_{2c}=y_{cr}$, se toma una serie de valores $y_2=y_{cr}$, a cada uno de los cuales corresponde el caudal crítico $Q=\mathfrak{M}_{cr}\cdot\sqrt{g}$. Por la curva de caudales de entrada se determina para cada uno de dichos caudales el calado $y_1=y_a-h_e$. Aplicando la Ec. [109] o la [111] entre los calados y_1 e y_2, se determina la longitud $l_{1.2}$. Se dibuja luego la curva de longitudes, así determinadas, en función de Q o de su equivalente y_{cr}. El punto de la curva $l=f(Q)$, que corresponde a la longitud del canal dado, resuelve el problema.

Para mayor claridad detallaremos los cálculos de un punto correspondiente a $y_2=y_{cr}=1,50$ m.

Para este punto, por la tabla auxiliar, o la curva 2 de la figura 149, se tiene:

$$Q_{cr}=30,86 \text{ m}^3/\text{sg.}; \quad \sigma_{cr}=24,27 \ ^{00}/_{00}$$

[Tabla auxiliar] (1)

y	a	b	P	R	C	$\mathfrak{K}$	$\mathfrak{M}_{cr}$	σ en 10^{-4}	Q_{cr}
2,99	25,370	12,970	14.781	1,716	70,789	2352,65	35,467	22,316	111,086
2,98	25.241	12,940	14,745	1,712	70,772	2336,55	35,262	22,308	110.444
2,95	24,854	12.850	14.636	1,698	70,720	2290.25	34,572	22,340	108,283
2,90	24,215	12,700	14,456	1,675	70,647	2217,09	33,441	22,367	104,740
2,85	23,584	12,550	14,276	1,652	70,533	2137.53	32,310	22,420	101,198
2.80	22,960	12,400	14,095	1,629	70.439	2063,65	31,248	22,481	97,871
2,75	22,344	12,250	13,915	1,606	70,333	1989,55	30,187	22,528	94.548
2.70	21,735	12.100	13,735	1,582	70,248	1970,76	29,103	22,563	91,153
2,60	20,540	11,800	13.374	1,536	70.030	1780,76	27.092	22,694	84,854
2,40	18,740	11,200	12.653	1,441	69.600	1523,40	23,256	22,843	72.840
2,20	16.060	10,600	11,932	1,346	69,123	1287.73	19,753	23,119	61,868
2,00	14,000	10.000	11,211	1,249	68,581	1072.47	16,562	23,382	51,874
1,80	12,060	9.400	10,490	1,150	67,977	878.83	13,652	23,671	42,759
1,50	9,375	8,500	9,408	0,996	66,892	625,86	9,853	24,270	30.860
1,20	6,960	7.600	8.327	0,836	65,501	416,68	6,661	25,060	20,863

(1) Esta tabla ha servido para el trazado de las curvas de la figura 149. No viene en el texto original. (*N. del T.*)

La pérdida de altura a la entrada es para $Q=30,86$ m³/sg. (curva 1), $h_e=0,10$ m.; por tanto:

$$y_1=3-0,1=2,90 \text{ m}.$$

Se tiene para la sección 1:

$$\tau_1=2,90/1,50=1,93\,;\quad \tau_1^{n+1}/n+1=1,93^{4,8}/4,8=4,90.$$

Además, σ_1 para $y_1=2,90$ m. es 22,367 ⁰⁰/₀₀, de donde:

$$\delta_1=\sigma_{cr}/\sigma_1=24,27/22,367=1,087.$$

Análogamente, para la sección 2,

$$y_{cr}=y_2=1,50 \text{ m.}\,;\quad \tau_2=1\,;\quad \sigma_2=\sigma_{cr}=24,27\ {}^{00}/_{00},$$

de donde

$$\frac{\tau_2^{n+1}}{n+1}=\frac{1}{4,8}=0,208,\quad \text{y}\quad \delta=1.$$

El valor medio de δ es:

$$\delta_{1,2}=\frac{1,087+1}{2}=1,044$$

El valor de

$$y_{cr}/\sigma_{cr}=1,50/24,27\cdot 10^{-4}=617 \text{ m}.$$

La distancia $l_{2,1}$ (Ec. [109])

$$l_{2,1}=617\,[1,044\,(1-1,93)-(0,208-4,90)]=2\,271 \text{ m}.$$

Esta longitud es mayor que la de 1 500 m. del canal, lo que indica que el caudal $Q=30,86$ m³/sg. es inferior a Q_{max}.

Para otros puntos se resumen los cálculos en la Tabla XXXV. Evidentemente, para todos ellos:

$$\tau_2=1\,;\quad \frac{\tau_2^{4,8}}{4,8}=0,208\,;\quad \delta_2=1.$$

TABLA XXXV

$y_2 = y_{cr}$	Q	σ_{cr} ⁰⁰/₀₀	y_{cr}/σ_{cr}	y_1	$\tau_1 = y_1/y_{cr}$	$\tau_1^{4,8}/4,8$	σ_1 ⁰⁰/₀₀	$\delta_1 = \sigma_{cr}/\sigma_1$	δ_m	$l_{1,2}$
1,80	42,76	23,67	761	2,78	1,54	1,65	22,50	1,050	1,025	677
1,65	36,80	23,97	689	2,84	1,72	2,81	22,43	1,068	1,034	1 280
1,50	30,86	24,27	617	2,90	1,93	4,90	22,367	1,087	1,044	2 271

En la figura 150 se representa la curva $y_{cr}=f(l)$; la solución para $L=1\,300$ m. es $y_2=y_{cr}=1{,}648$ m., y el caudal correspondiente es:

$$Q_{max}=36{,}81 \text{ m}^3/\text{sg}.$$

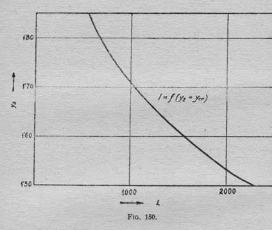


FIG. 150.

El punto Z y el punto C son los puntos extremos de la curva de gasto (fig. 151).

Exponemos a continuación los cálculos relativos a un punto intermedio:

Tomemos $y_{cr}=1{,}20$ m., correspondiente a $Q=20{,}86$ m³/segundo; $\sigma_{cr}=25{,}06\cdot 10^{-4}$; $y_{cr}/\sigma_{cr}=478$.

Para la sección 1 tenemos:

$$y_1=2{,}96;\quad \tau_1=2{,}96/1{,}20=2{,}47;\quad \tau_1^{4,8}/4{,}8=18$$
$$\sigma_1=22{,}33;\quad \vartheta_1=25{,}06/22{,}35=1{,}12.$$

Para determinar y_2 hay que hallar el valor de $\tau_2=y_2/1{,}2$ que verifique la ecuación:

$$\frac{\tau_2^{n+1}}{n+1}-\vartheta_{1,2}(\tau_2-\tau_1)=\frac{\tau_1^{n+1}}{n+1}-l_{1,2}\frac{\sigma_{cr}}{y_{cr}} \qquad [112]$$

que en nuestro caso se convierte en:

$$\frac{\tau_2^{4,8}}{4,8} - \delta_{1,2}(\tau_2 - 2,47) = 18 - \frac{1\,300}{478} = 15,28.$$

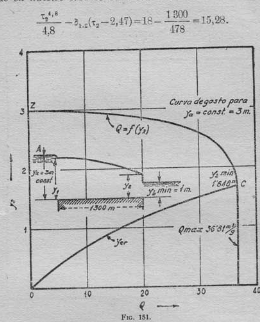


FIG. 151.

Una primera aproximación se obtiene haciendo

$$\frac{(\tau'_2)^{4,8}}{4,8} = 15,28$$

que corresponde a $\tau'_2 = 2,44$ e $y'_2 = 2,44 \times 1,2 = 2,93$ m.

Para tener un valor más aproximado se procede por tanteos, calculando el valor de $\Phi(\tau_2) = \frac{\tau_2^{4,8}}{4,8} - \delta_{1,2}(\tau_2 - 2,47)$ para $y_2 = 2,93$ (que dará algo por encima de 15,28, ya que se ha suprimido el segundo término que es positivo, por ser $\tau'_2 < 2,47$) y para otro valor inferior de y_2. Luego se

interpola entre los resultados de $\Phi(\tau)$ obtenidos para tener el valor aproximado de y_2.

El primer tanteo suele dar ya un valor bastante aproximado de y_2, siendo la aproximación tanto más satisfac-

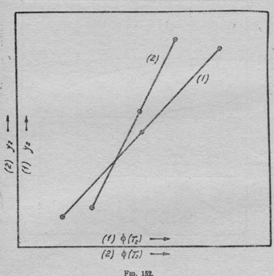


FIG. 152.

FIG. 152.—Esquema de la aproximación gráfica en el Ejemplo 28.

toria cuanto menor es el caudal, de suerte que para caudales pequeños puede prescindirse del término $\delta_{1.2}(\tau_2-\tau_1)$, quedando la ecuación en la forma sencilla:

$$\frac{\tau_2^{4,8}}{4,8} = \frac{\tau_1^{4,8}}{4,8} - \frac{L\,\sigma_{cr}}{y_{cr}}$$

Esta simplificación, por el contrario, no es aceptable para caudales Q mayores, próximos a Q_{max}.

CAPITULO XIV

PROYECTO DE CANALES

Las curvas de caudales que hemos estudiado son de aplicación útil para el cálculo de canales.

55. Aumento del caudal.—Un canal se proyecta generalmente para un determinado caudal de régimen, Q, que se supone ha de conducir el canal con movimiento uniforme. El cálculo consiste en determinar las dimensiones de la sección transversal y la pendiente del fondo s_0, que producen el gasto $Q = \mathfrak{K}_0 \sqrt{s_0}$ con el calado y_0.

En la práctica, o bien el coeficiente de rozamiento sobrepasa a menudo al supuesto en el cálculo, o bien se exige del canal un mayor caudal que el fijado. En ambos casos, el canal, tal como se ha proyectado, queda insuficiente, teniendo que aumentarse su capacidad.

El problema se enfocaría mediante las curvas de caudales, como se ha hecho en la figura 117 e ilustrado con ejemplos prácticos en la figura 120. Mientras que en un canal corto, o en un canal con pendiente extraordinariamente pequeña puede conseguirse un incremento del caudal por encima del correspondiente al régimen uniforme descendiendo el nivel y_2 al extremo del canal, por debajo del calado normal y_0 (curva 2, fig. 120), tal medio, en circunstancias normales, es absolutamente ineficaz (fig. 120, curvas 1 y 6). En otros términos: debe tenerse muy presente que fuera de casos excepcionales, el régimen uniforme con $y_2 = y_1$ es, en la práctica, el que da lugar al caudal máximo correspondiente al nivel inicial y_1.

El ingeniero proyectista debe cuidarse, por tanto, de no caer en el peligroso extremo de proyectar el canal estrictamente para el caudal Q en régimen uniforme; pueden, a veces, ahorrarse dinero y perturbaciones dimensionando la estructura con un margen razonable de posible

incremento de caudal, con el que hacer frente a contingencias de la explotación, de carácter urgente.

En condiciones normales, con una curva de gasto como la número 1 (fig. 120), el único modo eficaz de incrementar el caudal es aumentar el calado y_1 al comienzo del canal.

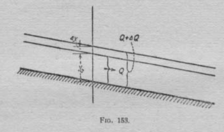


FIG. 153.

Suponiendo que el calado y_0 se incrementa en Δy, determinemos el incremento de caudal correspondiente:

Para el régimen normal se tiene:

$$Q = \mathfrak{K}\sqrt{s_0}\,; \qquad \mathfrak{K}^2 = \text{const} \times y^n,$$

donde n es el exponente hidráulico. Y para s_0 dada:

$$Q = \text{const}\, y_0^{n/2}.$$

El incremento de caudal ΔQ debido a Δy_0, será:

$$\Delta Q = \text{const}\,\frac{n}{2}\cdot y_0^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}\cdot \Delta y_0$$

de donde:

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{n}{2}\cdot\frac{\Delta y_0}{y_0} \qquad [113]$$

Por tanto, el incremento relativo de caudal es $\frac{n}{2}$ veces el incremento relativo de calado.

Por ejemplo, con $n = 3{,}6$, un incremento relativo de un 10 por 100 de caudal exige un incremento relativo de calado del 5,55 por 100.

56. Caudal variable.—En las obras de ingeniería, el volumen de agua está frecuentemente sometido a variacio-

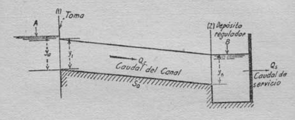


Fig. 154.—Caudales de servicio y del canal.

nes rápidas, que no están siempre sujetas a un horario preestablecido. Las variaciones de caudal pueden realizarse corrientemente mediante el accionamiento de compuertas. Aun cuando la maniobra de tales compuertas es a veces un procedimiento grosero, queda abierto amplio campo a la ingenuidad del ingeniero proyectista para teorizar, con determinados datos, sobre las propiedades del régimen variado.

Refiriéndonos a la figura 154, *B* representa una cámara de carga, de la que sale el *caudal de servicio* Q_s, el cual puede eventualmente diferir del caudal del canal Q_c, que toma éste del depósito *A*. La diferencia entre Q_s y Q_c se suple o absorbe por *B*.

Consideraremos dos casos principales:

1.° Q_s variable; Q_c constante; $Q_s \gtrless Q_c$. Este caso se produce cuando el caudal de entrada está limitado, por prescripción, a una cierta cantidad. Las fluctuaciones del caudal de servicio se suplen totalmente por la capacidad del depósito re-

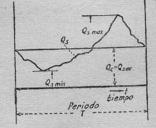


Fig. 155.—Fluctuación periódica del caudal de servicio Q_s.

gulador, siendo el valor medio de Q_s en un período de tiempo T, igual al gasto Q_c del canal (fig. 155).

Suponiendo el nivel A constante y la curva de gasto $Q=f(y_2)_{y_a=const}$ (fig. 156) análoga a la de la figura 120, el problema se resuelve adecuadamente disponiendo que los niveles en el depósito B fluctúen dentro de aquellos límites (B''_{max} y B'_{min}), entre los que la curva de gasto es muy pendiente y la variación del calado y_2 no afecte prácticamente al gasto del canal. En ciertos casos, cuando $s_0 L$

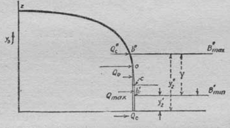


FIG. 156.—Empleo de las propiedades de las curvas de gasto en un esquema en que el gasto del canal permanece prácticamente invariable respecto a las fluctuaciones de nivel del depósito regulador.

es suficientemente grande, el canal puede dar rendimiento sin fluctuación sensible de Q_c, no solamente en la zona o-b', sino también en una parte de la o-b''. En conjunto, ésta es una solución muy sencilla y totalmente automática.

Como ilustración, la figura 157 muestra una curva de gasto para un canal con pendiente del fondo de 5 °/₀₀, longitud $L=3$ millas e $y_1=$const.$=5$ pies. Una oscilación del nivel B de una amplitud $Y=6$ pies, donde $y'_{2min}=2$ pies a $y''_{2max}=8$ pies hace fluctuar el caudal Q_c de 244 a 241 pies cúbicos por segundo, es decir, menos del $1\frac{1}{2}$ por 100.

2.° $Q_s=Q_c$; Q_c *variable*.—Este caso es el opuesto al considerado anteriormente. Se prescinde de las posibilidades de acumulación en B, teniendo que tomarse el caudal de servicio Q_s, cuando y en la forma que se precise, directamente del depósito A.

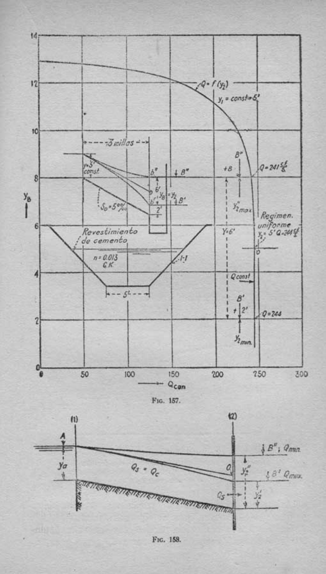


Fig. 157.

Fig. 158.

Refiriéndonos a las figuras 155, 158 y 159, suponiendo que la toma es libre y que el nivel A no varía, los estados límites al final del canal vendrán representados por los

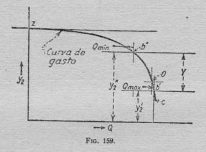


FIG. 159.

calados y''_2 e y'_2, correspondientes, respectivamente, a Q_{min} y Q_{max}.

El nivel y_2 y, por consiguiente, el régimen del canal, se adaptará automáticamente al gasto, como ya se ha indicado. El inconveniente de esta disposición es que la fluctuación

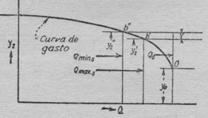


FIG. 160.—Empleo de las propiedades de las curvas de gasto para asegurar en un canal fluctuaciones considerables del caudal con variaciones de nivel relativamente pequeñas en el extremo variable.

del nivel en la zona inferior puede ser considerable y presentar ello inconvenientes de tipo estructural.

Las fluctuaciones de nivel pueden reducirse evitando entrar en la zona escarpada de la curva de gasto y explo-

tando el canal entre b' y b'', como en la figura 160. Esto se realiza forzando la pendiente del fondo del canal y haciendo Q_0 (punto O) mayor que el Q_{max} requerido. En el ejemplo que sigue se aclara este punto.

EJEMPLO 29

Supongamos el caso de la figura 119, y_a=const=2 m. y que el caudal demandado oscila normalmente entre 35 y 16 m^3/sg., y en casos extremos entre 38 y 14,30.

De la Tabla XXXIII (o de la curva 6, fig. 120), se tiene:

$$Q = 38 \quad 35 \quad 16 \quad 14{,}30$$
$$y_2 = 2{,}35 \quad 2{,}49 \quad 3{,}11 \quad 3{,}13.$$

En condiciones normales, la oscilación del nivel es $Y=3{,}11-2{,}49=0{,}62$ m. La oscilación máxima es $3{,}13-2{,}35=0{,}78$.

Para reducir la oscilación incrementemos la pendiente del canal a $6\,^{00}/_{00}$; entonces $s_0L=1{,}80$ m. Supongamos y_1 constante e igual a 2 m. y determinemos los calados y_2 correspondientes a los caudales expresados. Para el primer caudal $Q=38$ m^3/sg., se tiene:

$$K_0 = 38/\sqrt{6}\cdot 10^{-2} = 1\,500\,; \quad y_0 = 1{,}54 \text{ m.},$$

de donde

$$\eta_1 = 2/1{,}54 = 1{,}30\,; \quad \Phi(\eta_1)_{n=3,6} = 1{,}063\,; \quad \frac{s_0 L}{y_0} = \frac{1{,}8}{1{,}54} = 1{,}17$$

y

$$\Phi(\eta_2) = \Phi(\eta_1) + \frac{Ls_0}{y_0} = 1{,}063 + 1{,}170 = 2{,}233,$$

que corresponde a

$$\eta_2 = 2{,}279\,; \quad y_2 = 2{,}279 \times 1{,}54 = 3{,}51.$$

Aplicando el procedimiento a los otros puntos, se tiene:

TABLA XXXVI

	Q m³/sg			
	38	35	16	14,30
$\mathfrak{K}_0$	1 500	1 430	653	584
y_0	1,54	1,50	0,94	0,88
η_1	1,30	1,33	2,13	2,27
$\Phi(\eta_1)$	1,063	1,110	2,074	2,223
S_0L/y_0	1,170	1,200	1,920	2,050
$\Phi(\eta_2)$	2,233	2,310	3,994	4,273
η_2	2,279	2,354	4,004	4,281
y_2	3,510	3,531	3,764	3,767

Se ve, comparando con el caso $s_0 = 4\ ^{00}/_{00}$, que la amplitud de la oscilación máxima del nivel en B se reduce de 0,780 m. a 0,257 m. Sin embargo, el resultado se obtiene a costa de un aumento considerable del calado.

57. Acumulación.—Régimen gradualmente variable. Los problemas de gasto variable guardan relación directa con los de acumulación. En efecto: la cámara B (fig. 154) atiende las fluctuaciones del caudal variable de servicio Q_s, mientras que por la toma entra un caudal constante Q_e. También, en relación con la figura 158, podía existir una cámara de distribución en la extremidad inferior del canal para compensar en parte las fluctuaciones de Q_s, en cuyo caso, como sucede corrientemente, Q_s y Q_e serían variables.

Finalmente, en la figura 116 se representan dos canales, posiblemente de diferente sección transversal y pendiente, con un depósito de acumulación intercalado entre ellos. En general, los tres niveles A, B y S pueden variar, contribuyendo cada uno de los tres depósitos al almacenaje. La variación del nivel en cada depósito depende de la diferencia entre el caudal que entra y el que sale. Por ejemplo, la variación de nivel en el depósito intermedio S en un lapso de tiempo Δt será:

$$\Delta y_s \cdot A_s = (Q_A - Q_B)\,\Delta t \qquad [114]$$

donde A_s es la superficie del depósito a la altura y_s y Q_A y Q_B los gastos respectivos de los canales I y II. Análogamente, para el depósito B se tendría:

$$\Delta y_B \cdot A_B = (Q_B - Q_s)\Delta t.$$

Como los valores del gasto de un canal dependen *principalmente* de los calados en los extremos del mismo:

$$Q_A = f_1(y_1,\ y_2);\quad Q_B = f_2(y_3,\ y_4),\ \text{etc.} \qquad [115]$$

Hemos dicho *principalmente* por la razón de que el movimiento que *cambia con el tiempo* no es permanente, así que no se trata entonces de movimiento *variado*, sino *variable*. Por tanto, las ecuaciones del régimen variado no son de aplicación estricta, siendo válidas sólo dentro de ciertas limitaciones.

La ecuación general del régimen variable-variado, es decir, del movimiento que no es uniforme de sección a sección, y simultáneamente varía con el tiempo, se obtiene de la Ec. [17] añadiendo un término que refleja la aceleración del movimiento. La ecuación se convierte en:

$$s = \frac{v^2}{C^2 R} + \frac{d}{dx}\left(\frac{v^2}{2g}\right) + \frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t} \qquad [116]$$

En el estado actual de la ciencia no existe un método general que permita tratar los problemas de régimen variable de forma adaptable a la práctica del ingeniero, excepto en limitados casos particulares, como, por ejemplo, el de las llamadas *ondas de traslación* o intumescencias producidas por una variación brusca del caudal.

Otro caso es aquel en que la variación del régimen con el tiempo tiene lugar muy lentamente, como sucedería si las áreas superficiales de los depósitos o embalses fuesen grandes, de forma que el cambio de nivel, y, por consiguiente, de caudal, fuese apreciable solamente al cabo de un lapso considerable de tiempo. Tal movimiento puede denominarse con propiedad *lentamente variable*. El valor de la derivada $\frac{\partial v}{\partial t}$ en la Ec. [116] en tal caso puede hacerse despreciable y prescindirse de dicho término.

Esto significará que en un determinado momento en que los calados en los extremos del canal son y_1 e y_2, el régimen con movimiento lentamente variable difiere sólo infinitesimalmente del régimen con movimiento permanente variado con los mismos calados. Con otras palabras: en el momento dado, tanto el caudal como la superficie libre se suponen idénticos a los que se tendría en el caso de que en el canal se tuviera régimen permanente no-uniforme. Esta aproximación es válida en muchos problemas de ingeniería en que se tratan casos de regulación de fluctuaciones cuyo período es de muchas horas y aun de días.

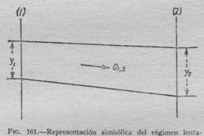


Fig. 161.—Representación simbólica del régimen lentamente variable y curva de gasto del Ejemplo 30.

Por otro lado, hay muchos casos, por ejemplo, en instalaciones hidroeléctricas con tirones súbitos de la carga, donde no prevalece el régimen lentamente variable, en los que es necesario introducir el método que tiene en cuenta los fenómenos de ondas e intumescencias.

Nos ocuparemos aquí solamente de problemas de movimiento lentamente variado, que, como queda dicho, se supondrá idéntico al que tendría lugar con los calados y_1 e y_2 con movimiento permanente variado. Esto significa que para cualquier combinación de niveles son aplicables las curvas de gasto tal como se han estudiado y representado en las figuras 117, 127 y 132.

Los problemas de acumulación se resuelven dividiendo el proceso de llenado o vaciado de un depósito en pequeños períodos de tiempo dados por incrementos del

calado Δy. Para cada incremento puede establecerse una ecuación del tipo 114 que se extienda a un cierto lapso de tiempo Δt. Así puede hacerse, paso a paso, la representación completa del fenómeno.

Seguidamente se ilustra esto con un ejemplo práctico. En general, cada problema requiere su peculiar método

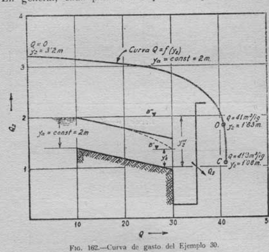


FIG. 162.—Curva de gasto del Ejemplo 30.

de aproximación, cuya elección depende de los recursos del ingeniero proyectista.

EJEMPLO 30

Supongamos (fig. 162) el canal del Ejemplo 17 (fig. 119), con una pendiente del fondo de $4\,^{00}/_{00}$ y una longitud de 3 Km. El nivel, en el depósito A, se mantiene constante con $y_a = 2$ m. La toma es libre $(1 + \zeta = 1{,}25)$. La curva de gasto $Q = f(y_2)_{y_a = 2\,\text{m}}$ se ha calculado según el artículo 53. El caudal normal es $Q_0 = 41$ m³/sg., con $y_2 = y_1 = 1{,}83$ m. Se desprecia el efecto de la curva de depresión sobre el in-

cremento de caudal de modo que para todos los calados $y_2 < 1{,}83$ Q_c se supone constante e igual a 41 m³/sg.

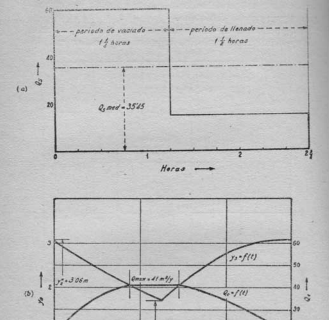


FIG. 163.—(a) Diagrama del caudal de servicio del Ejemplo 30. (b) Curvas de gasto del canal y calados en función del tiempo.

En la figura 163, *a*, se dibuja el diagrama de tiempos del caudal de servicio que se toma del depósito *B*, el cual tiene una superficie de 75 000 m².

1.° Determinar los límites de fluctuación del nivel $y_B = y_2$ en el embalse regulador y con éstos los límites de variación del caudal del canal Q_c.

2.° Dibujar el diagrama que represente la variación de y_B y Q_c en el tiempo.

En la figura 162, y''_2 e y'_2 designan, respectivamente, los niveles máximo y mínimo en el depósito B cuando se opera sobre el diagrama de tiempos de servicio (fig. 163). Evidentemente, y''_2 será alcanzado al final del período de llenado, cuya duración es $1\frac{1}{2}$ horas, con $Q_s = 15$ m³/sg. El nivel inferior y'_2 se producirá al final del período de vaciado, la duración del cual es de $1\frac{1}{4}$ horas, con $Q = 60$ m³/sg. Es, además, evidente que en ningún momento puede el caudal del canal bajar del caudal mínimo de servicio, al que corresponde en la curva de caudales $y_2 = 3{,}08$ m. Por tanto, $y_B = 3{,}08$ es el máximo nivel posible en B.

Período de vaciado.—El diagrama de tiempos tiene por ecuación

$$\Delta y_B \times 75\,000 = (60 - Q_c)\,\Delta t,$$

o si, como conviene en tales casos, se mide el tiempo en minutos:

$$\Delta t = \frac{75\,000}{60} \times \frac{\Delta y_B}{60 - Q_c} = 1\,250 \times \frac{\Delta y_B}{60 - Q_c}$$

Calculamos a continuación dicha curva hacia abajo, comenzando por $y_B = 3{,}08$. Fijamos un intervalo de calados $\Delta y_B = 0{,}28$ entre $y_B = 3{,}08$ e $y_B = 2{,}80$. De la curva de gasto tomamos los caudales correspondientes a los niveles al principio y al final del intervalo de calados, que son: $Q_c = 15$ m³/sg. y $Q_c = 31$ m³/sg., con un valor medio para el intervalo de $Q_c = 37$ m³/sg. El tiempo en el que el nivel desciende de 3,08 a 2,80 será:

$$\Delta t = 1\,250 \cdot \frac{0{,}28}{37} = 9{,}45 \text{ min.}$$

Aplicando el procedimiento a sucesivos intervalos de calado se tiene:

TABLA XXXVII

y_B	Q_c	$60-Q_c$	Media en el intervalo de $60-Q_c$	Δy_B	Δt_{min}	t_{min}
3,08	15,0	45,0	....	....	....	0,00
			37,00	0,28	9,45	
2,80	31,9	29,0	....	....	....	9,45
			27,15	0,20	9,22	
2,60	34,7	25,3	....	....	....	18,67
			23,90	0,20	10,45	
2,40	37,5	22,5	....	....	....	29,12
			21,50	0,20	11,61	
2,20	39,5	20,5	....	....	....	40,73
			20,00	0,20	12,50	
2,00	40,5	19,5	....	....	....	53,23
			19,25	0,17	12,98	
1,83	41,0	19,0	....	....	....	66,21

La última columna, que es la suma al origen de los valores de la penúltima, da el tiempo requerido para descender el nivel desde el estado inicial $y_B=3{,}08$ m. al que indica la primera columna

La tabla se extiende hasta el calado de régimen uniforme $y_2=1{,}83$. Por debajo, con $Q=\text{const}=41$ m³/sg., el vaciado tiene lugar a una velocidad constante de

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{60-41}{1\,250} = 0{,}0152 \text{ m/minuto.}$$

La curva $f(t, y_B)$ se representa en la figura 164 (curva 1).

Curva de llenado.—La ecuación de la curva de llenado es:

$$\Delta t = 1\,250 \cdot \frac{\Delta y_B}{Q_c - 15} \text{ min.}$$

En la Tabla XXXVIII se resumen las etapas del cálculo.

TABLA XXXVIII

y_B	Q_e	Q_e-15	Media en el intervalo de Q_e-15	Δy_B	Δt	t
3,08	15,0	0,0				0,00
			8,00	0,28	43,7	
2,80	31,0	16,0				43,70
			17,85	0,20	14,00	
2,60	34,7	19,7				57,70
			21,10	0,20	11,84	
2,40	37,5	22,5				69,54
			23,50	0,20	10,63	
2,20	39,5	24,5				80,17
			25,00	0,20	10,00	
2,00	40,5	25,5				90,17
			25,75	0,17	9,61	
1,83	41,0	26,0				99,78

Se observará que la tabla está construída en dirección opuesta al movimiento real del nivel, de forma que los valores de t en la última columna indican el tiempo que ha de transcurrir hasta que el nivel alcance el estado final $y_B=3,08$ desde el calado dado en la primera columna. Por debajo del calado normal el llenado tiene lugar con una velocidad uniforme

$$\frac{\Delta y_B}{\Delta t} = \frac{41-15}{1\,250} = 0,0208 \text{ m/minuto}$$

La curva se representa en la figura 164, curva 2.

Los límites de fluctuación del nivel.—Supongamos, en primer lugar, $y''_B=3,08$. En $1\frac{1}{4}$ horas de vaciado (V. diagrama 163, *a*) el nivel descenderá, conforme a la curva 1 (fig. 164), de 3,08 a $y_B=1,70$ m.

Según la curva de llenado, la distancia, en tiempo, entre el nivel 1,7 y el 3,08, es 102 min., que excede al tiempo de 90 min. supuesto en el diagrama de llenado (fig. 163, *a*).

Esto significa que el nivel inicial 3,08 m. se ha supuesto demasiado alto.

Supongamos, en segundo lugar, $y''_B = 2{,}90$. En $1\frac{1}{4}$ horas de vaciado desciende el nivel de 2,90 a 1,60 m. El tiempo, según la curva de llenado, entre los niveles 1,60 y 2,90 m., es de 74 min. menor que el supuesto de 90 min. Ello indica que una ligera variación en el estado inicial ejerce un pronunciado efecto en el tiempo de rellenado por

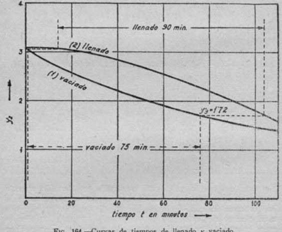


Fig. 164.—Curvas de tiempos de llenado y vaciado relativas al Ejemplo 30.

la razón de que en las proximidades de $y_2 = 3{,}08$ m. la diferencia entre Q_e y Q_s es muy pequeña y la curva muy tendida. Evidentemente, el nivel real y'_B está entre 2,90 y 3,08. El problema se resuelve hallando un par de calados tales como y''_B e y'_B cuyo intervalo de tiempo, según las curvas de vaciado y llenado, sea, respectivamente, de 75 y 90 minutos. En nuestro caso particular, como se representa en la figura 164, la condición queda satisfecha con aproximación suficiente para $y''_B = 3{,}06$ e $y'_B = 1{,}72$.

Como se ve, la variación total de nivel es $3{,}06 - 1{,}72 =$

=1,34 m., con una variación del caudal de servicio entre un máximo de 41 m³/sg. y un mínimo de 18 m³/sg. Una vez determinados los puntos inicial y final se puede dibujar por puntos, con auxilio de las curvas de la figura 164, el diagrama de y_B y Q_B, que, en unión del diagrama de servicio, proporciona una representación completa del funcionamiento de la instalación (fig. 163, *b*).

Evidentemente, las curvas de la figura 164 pueden emplearse para cualquier otro tiempo fijado del diagrama de servicio, siempre que en el período de vaciado y llenado los caudales de servicio sean los mismos.

CAPITULO XV

CANALES CON FUERTE PENDIENTE DE SOLERA

Los canales con pendiente fuerte del fondo, superior a la crítica ($s_0 > \sigma$), que en la mayoría de los casos son de corta longitud, se emplean en rápidos, canales de flotación, aliviaderos laterales y otras estructuras análogas.

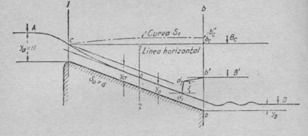


Fig. 165.—Cauce con fuerte pendiente.

58. Gasto y condiciones de toma.—En la figura 165, y_a es la profundidad del depósito A antes del umbral; y_0, el calado en el canal con régimen uniforme. Para $s_0 > \sigma$, y_0 es $< y_{cr}$. La superficie libre corta a la línea de calado crítico en las proximidades del punto C y se aproxima a la línea de calado normal según una curva descendente del tipo S_2. Como anteriormente se ha expuesto, la zona de transición no ofrece ondulaciones. La lámina libre pasa de convexa a cóncava en el punto de inflexión, que es el de corte con la línea de calado crítico.

Cuando la entrada es libre, es decir, cuando no es afectada por el nivel inferior, la toma se asimila a un vertedero. El gasto del canal está únicamente condicionado al *caudal*

de entrada, que es, simplemente, el gasto del vertedero

$$Q_c = Q_{ent} = b \cdot m \cdot \sqrt{2g} \cdot \left(y_a + \frac{v_0^2}{2g} \right)^{3/2} \qquad [117]$$

donde b es el ancho del vertedero y v_0 la velocidad de llegada.

Otra característica del régimen hidráulico en estos canales es la relativamente corta longitud de la curva de depresión *c-o*, la cual puede considerarse como una zona de transición en la que el calado alcanza rápidamente el valor mínimo y_0. Por ello, cuando se proyectan cauces rápidos, el ingeniero, sin más complicaciones, puede operar con el calado normal, como calado mínimo para paso de embarcaciones o materias flotantes, etc.

Efecto del régimen aguas abajo.—Al subir el nivel aguas abajo (B' en la fig. 165) se forma un resalto j entre d_1 y d_2 con un enlace, con arco de curva S_1, entre d_2 y b'. El régimen encima del resalto (a la izquierda de d_1) no vendrá afectado por lo que ocurra debajo.

Cuando el nivel sube, el resalto avanzará hacia arriba, manteniendo su altura y forma, en tanto avance sobre la zona de movimiento uniforme, hasta llegar al punto o (sección 2). Desde aquí en adelante el resalto seguirá ascendiendo, disminuyendo de altura. Como ya se ha explicado anteriormente, la altura del resalto para el calado crítico es infinitamente pequeña ($j=0$). El nivel b_c'', que determina una curva S_1 que termina en c, es el límite teórico por encima del cual se produce el régimen de vertedero sumergido, en cuyo caso el régimen aguas abajo tiene un efecto directo sobre el caudal de entrada.

59. TRANSICIÓN A AGUAS ABAJO.—Un problema interesante en proyectos hidráulicos es establecer la transición entre el agua que fluye por un rápido y la superficie del contraembalse. En canales de descarga de aliviaderos se pretende la anulación de la energía, siendo este caso análogo al del resalto al pie de una presa (V. capítulo XXI). Una modalidad particular se presenta cuando el canal de fuerte pendiente forma parte de un rápido u otra estructura destinada al paso de embarcaciones desde el nivel superior

al inferior. Cuando el nivel B es suficientemente bajo, se forman ondulaciones (fig. 165).

Las condiciones de transición, por otro lado, se nacen desfavorables cuando, al subir el nivel, se forma el resalto. El rulo de agua que se forma al pie del resalto puede constituir una barrera infranqueable y siempre un obstáculo peligroso.

El autor ha encontrado práctico, en algunos casos, el intercalar entre la zona de pendiente fuerte y el embalse una *zona neutralizadora* con una pendiente $s_0 = \sigma$ (N en la figura 166), cuyo efecto es provocar que el agua que dis-

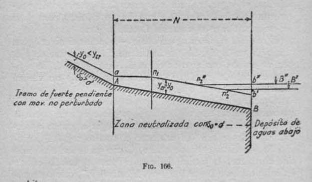


Fig. 166.

curre por ella entre en régimen crítico, en cuyo caso no puede formarse el resalto. Según el artículo 30 (curvas de clase C), las superficies libres teóricas a-n_1 entre $y_0 \cong y_{cr}$, así como $n_2 b$ entre y_{cr} y el embalse inferior, serán rectas horizontales. Cuando el nivel B sube, la línea horizontal $n_2 b$ ascenderá igualmente sin perturbación apreciable en n_2, donde teóricamente se forma un resalto de altura cero.

Ejemplo 31

Un rápido ha de comunicar los niveles A y B (fig. 167). El nivel A se mantiene constante 10 m. sobre el estado inferior de B, al que se da la cota cero. El nivel de aguas abajo fluctúa 3 m. La sección es rectangular, de 6 m. de

ancho, con un calado mínimo de 0,80 m. La velocidad media no debe exceder de 16 Km/hora$\simeq$4,5 m/sg. y el volumen de agua empleado debe ser inferior a 25 m³/sg.

Para economizar longitud y reducir la velocidad se aumenta la rugosidad, revistiendo la solera y cajeros con

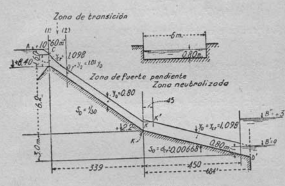


FIG. 167.—Rápido del Ejemplo 31.

mampostería tosca, que se supone eleva el coeficiente γ de Bazin a 0,85.

En régimen uniforme se tendrá:

$$a=6\times0{,}80=4{,}80 \text{ m}^2;\ p=7{,}60;\ R=0{,}63 \text{ m.};\ C=42.$$

Con v_{max} dado determinamos:

$$s_0=v^2/C^2R=4{,}5^2/42^2\cdot 0{,}63=0{,}0183$$

$$Q=4{,}80\times4{,}5=21{,}6 \text{ m}^3/\text{sg.};\ q=3{,}6 \text{ m}^3/\text{sg.}$$

Condiciones en la toma.—Suponiendo un coeficiente $\mu=0{,}6$ se tiene:

$$y_a^{3/2}=q\Big/\frac{2}{3}\mu\sqrt{2g} \quad \text{de donde} \quad y_a=1{,}60 \text{ m.}$$

Longitud de la curva de transición (*c-o* en la fig. 167).—El calado crítico

$$y_{cr}=\sqrt[3]{q^2/g}=\sqrt[3]{3{,}6^2/9{,}81}=1{,}098 \text{ m.}$$

Los elementos hidráulicos correspondientes al régimen crítico son:

$$a_{cr} = 6 \times 1{,}098 = 6{,}588 \text{ m}^2.$$
$$p = 6 + 2 \times 1{,}098 = 8{,}196 \text{ m}.$$
$$R = 0{,}8 \text{ m.}; \; C = 44{,}6$$
$$\sigma_{cr} = g/C^2 \,.\, p/b = 9{,}81/44{,}6^2 \times 8{,}196/6 = 0{,}00668.$$

La pendiente crítica para $y_0 = 0{,}80$

$$\sigma_0 = 9{,}81/42^2 \times 7{,}60/6 = 0{,}007$$

El valor medio de

$$\beta = s_0/\sigma = 0{,}0183/0{,}0068 = 2{,}7.$$

Para determinar el exponente hidráulico se tiene:

$$(y_{cr}/y_0)^n = (\mathcal{K}_{cr}/\mathcal{K}_0)^2 = s_0/\sigma_{cr} = 2{,}7$$

$$\frac{y_{cr}}{y_0} = \frac{1{,}098}{0{,}80} = 1{,}37,$$

de donde

$$n = \frac{\lg 2{,}7}{\lg 1{,}37} = 3{,}20.$$

Empleando los valores de la Tabla IA se tiene una longitud de curva entre $\eta_1 = y_{cr}/y_0 = 1{,}37$ y $\eta_2 = 1{,}01$:

$$l = \frac{y_0}{s_0}\left[(1{,}01 - 1{,}37) - (1 - 2{,}7)(1{,}291 - 0{,}272)\right] =$$
$$= 1{,}37\,\frac{0{,}8}{0{,}0183} = 60 \text{ m}.$$

Tramo neutralizador.—Los elementos son: $y_{cr} = y_0 = 1{,}098$ m.; $s_0 = \sigma_{cr} = 0{,}00668$; $v_{cr} = \dfrac{3{,}6}{1{,}098} = 3{,}28$ m/sg.

La longitud mínima teórica de este tramo será:

$$l_n = \frac{3}{0{,}00668} + \frac{1{,}098 - 0{,}80}{0{,}00668} = 450 + 45 = 495 \text{ m}.$$

Longitud del tramo pendiente,

$$l_s = \frac{6{,}20}{0{,}0183} = 339 \text{ m}.$$

El perfil teórico se representa en la figura 167.

CAPITULO XVI

CURVAS DE REMANSO EN CURSOS NATURALES DE AGUA

60. GENERALIDADES.—Es el problema clásico del régimen variado, el único al que han dedicado atención casi todos los tratados de hidráulica. En la figura 168, en la que *H-H* es la línea de referencia, el nivel de agua se ha elevado, mediante una presa, de *d* a *d'*. El perfil superfi-

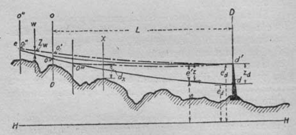


FIG. 168.—Curva de remanso en un río: $d'-o''$, curva límite superior; $d'-o'''$, curva límite inferior.

cial en las condiciones iniciales, con un caudal *Q*, era *d-o*, estribando el problema en determinar la curva de remanso *d'-o'* producida por la presa.

De una manera general, dada la irregularidad del régimen, cualquier solución debe considerarse como una grosera aproximación. El cálculo de las curvas de remanso pertenece al tipo de cálculos que podrían denominarse *de control*, cuyo objeto consiste generalmente en verificar que no se sobrepasan determinadas limitaciones.

En problemas de este tipo debe tenerse siempre en cuenta cuál es el objeto específico del cálculo y realizar éste

bajo hipótesis adecuadas. El método se aclarará comparando los dos casos extremos que conducen a las que denominaremos *curvas límites* (superior e inferior) *de remanso*.

Curva límite superior.—Supongamos que la presa de la figura 168 forma parte de una instalación hidroeléctrica. Entonces, naturalmente, la sobreelevación tendrá el valor máximo posible Z_d. La limitación que se impone generalmente es la de que la curva de remanso no se remonte más allá de un determinado punto o'', o que en una determinada sección w la subida del nivel no exceda de un cierto valor Z_w.

En tal caso, las hipótesis y simplificaciones de cálculo se harán con un cierto margen de seguridad, de forma que den lugar a una curva d'-o'' de las máximas longitud y elevación posibles.

Curva límite inferior.—Supongamos, por el contrario, que la presa forma parte de un dispositivo destinado a establecer condiciones de navegación. En este caso el nivel d' viene a menudo impuesto por las exigencias de calado en cierta sección x. La curva de remanso se calculará bajo las premisas y simplificaciones tendentes a que alcance la posición inferior posible d'-o'''. La curva real se encontrará entre ambas.

Ríos y torrentes (V. art. 23).—Debe recordarse que las curvas de remanso del tipo representado en la figura 168 tienen lugar solamente en «ríos», es decir, en curvas donde el régimen en condiciones naturales es *tranquilo* y la pendiente es inferior a la crítica ($s<\sigma$). En un «torrente», caracterizado por ser *rápido* el régimen natural y ser la pendiente superior a la crítica ($s>\sigma$), la curva de remanso d'-j (fig. 169) será una curva convexa del tipo S_1, terminando en un resalto j. En la práctica suele ser raras veces necesario determinar el perfil exacto de tales curvas, siendo lo importante que la totalidad de la curva y resalto se encuentren por debajo de la horizontal d'-o. Esta línea de nivel, por tanto, se supone es el límite exterior de todas las curvas posibles. En efecto: ya se verá en la práctica que la superficie curva real difiere sólo ligeramente de esta línea horizontal, siendo la razón que generalmente la pen-

diente de los cursos torrenciales no es muy superior a la crítica, por lo que la convexidad de la curva S_1 es pequeña.

Otro aspecto característico de las corrientes naturales

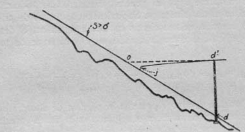


FIG. 169.—Curva de remanso en un torrente.

es que el resalto j no es tan marcado como, por ejemplo, el que se forma después de una compuerta c al pie de un vertedero. Como se aclarará en los próximos capítulos, los

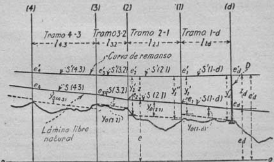


FIG. 170.—Descomposición en tramos parciales.

cursos de agua naturales, debido a su baja cineticidad, producen resaltos que ofrecen una serie de ondulaciones.

61. PROCEDIMIENTOS PRÁCTICOS.—El método usual para el cálculo de las curvas de remanso es dividir el perfil lon-

gitudinal en *tramos* (fig. 170), haciendo la descomposición de forma que cada tramo posea una más o menos homogénea pendiente superficial s, una anchura superficial más o menos uniforme b y, en general, características hidráulicas más o menos similares. Suponiendo que dentro del tramo en cuestión existen ciertas condiciones medias, el descenso superficial entre la sección $n+1$ y la n puede tomarse:

$$e'_{n+1} - e'_{n} = (s' \times l)_{n+1,\,n} = \left(\frac{v^2}{C^2 R} \times l\right)_{n+1,\,n} + \frac{v^2_{n} - v^2_{n+1}}{2g}$$

El primer término representa la pérdida de altura, por rozamiento, en el tramo, y el segundo es la altura ganada por transformación de la energía cinética en potencial. En una curva ascendente puede despreciarse el último, quedando:

$$(\Delta e')_{n+1,\,n} = e'_{n+1} - e'_{n} = (v^2/C^2 R \times l)_{n+1,\,n} \qquad [118]$$

Suponiendo que se dispone de los datos precisos, se puede subdividir el curso de agua en cualquier número de tramos parciales, y aplicando la Ec. [118] a partir de la sección d, donde es un dato la sobreelevación e'_d ocasionada por la presa, determinar sucesivamente las sobreelevaciones en cada sección y trazar la curva de remanso. Naturalmente que en la forma de tratar el problema existe un amplio campo de elección abierto al criterio del ingeniero proyectista. Sin embargo, en todo caso, el procedimiento resulta enfadoso y lento.

Perfiles equivalentes.—Para simplificar los cálculos, primeramente Dupuit y luego otros autores han sugerido reemplazar el lecho natural, variado e irregular, por secciones transversales *equivalentes* de forma sencilla y regular. Así, la figura 171 *b* da el perfil parabólico equivalente recomendado por Tolkmitt, y la figura 171 *a* representa un perfil rectangular empleado por Dupuit, Rühlmann, Bresse, Schaffernack y otros.

Para el cálculo de un perfil equivalente se emplea generalmente el ancho b, mientras que el calado medio se determina para cada tramo en cuestión habida cuenta del caudal y la pendiente media superficial del tramo, supues-

to el régimen uniforme. Empleando términos adoptados en este libro, el perfil equivalente en cada tramo vendrá determinado por un coeficiente de gasto $\mathfrak{K} = Q/(\sqrt{s})_{n+1,n}$.

El resultado de la adopción de las secciones transversales equivalentes implicará en la figura 170 la sustitución de la línea irregular del fondo por una línea recta ideal dibujada de trazos y paralela a la superficie a una distancia igual al calado equivalente $(y_0)_{n+1,n}$ correspondiente al

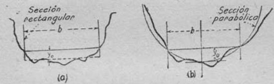


FIG. 171.—Perfiles equivalentes.

régimen uniforme. Se puede aplicar, para el cálculo de la curva de remanso, la Ec. [91], que, aplicada a un tramo, da:

$$(s \cdot l/y_0)_{n+1,n} = \Phi(\eta)_n - \Phi(\eta)_{n+1} \qquad [119]$$

Comenzando por el tramo próximo a la presa y entrando con la sobreelevación inicial z_d y el calado y'_d dado, la ecuación [119] determina el calado y'_1 y, por tanto, la elevación e'_1 en la sección 1. Pasando ahora al tramo 2-1 y conociendo el calado y''_1 puede determinarse y'_2, e'_2 y así seguidamente.

62. MÉTODO GENERAL.—Teniendo en cuenta el método de cálculo de curvas de lámina libre expuesto en el artículo 33 puede obtenerse otro método para el cálculo de las curvas de remanso. En efecto, empleando la Ec. [119] no es preciso recurrir a ninguna sección ideal de forma geométrica definida. Lo único necesario es conocer el valor particular del exponente hidráulico n medio en el tramo en cuestión.

Si una escala y una curva de gasto $Q = f(h)_g$ son válidas para una determinada sección (fig. 172 *a*), puede suponerse directamente proporcional a la curva $\mathfrak{K}$, siendo la des-

viación debida únicamente a la variación, en los diferentes tramos, de la pendiente superficial. La representación logarítmica de la curva de gasto es una recta de pendiente $n/2$ en el tramo correspondiente. Para dibujarla es preciso conocer en primer lugar la posición del punto cero o_s a partir del cual se miden los calados en la Ec. $Q^2 = \text{const} \cdot y^n$. Este punto puede determinarse extrapolando en la curva de gasto hasta el punto de corte o_v de ella con la vertical $Q = 0$. Un sencillo expediente, útil en muchos casos, consiste en trazar una línea horizontal $t-t$ que parte del punto

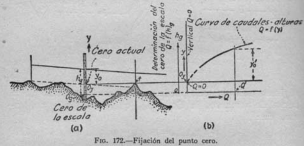


Fig. 172.—Fijación del punto cero.

más alto t anterior a la escala. El punto de intersección de dicha horizontal con la escala vertical da el punto cero o_s para el cual $Q = 0$. Es, además, evidente que el punto cero determina directamente el respectivo calado uniforme equivalente. En efecto, para cualquier caudal Q' el correspondiente calado normal tomado de la curva de gasto será y'_0

Un estudio hidrológico detenido suministra generalmente (fig. 173) perfiles superficiales para una serie de caudales. Estos perfiles, en unión de una curva de gasto referida a una escala, son material suficiente para representar la relación $Q^2 = \text{const.}\ y^n$ correspondiente a cada tramo. En otros términos: con material hidrográfico idóneo al alcance pueden determinarse, para la totalidad del curso de agua en cuestión, los valores del exponente hidráulico n, así como las posiciones de los puntos cero. Conocido n puede aplicarse directamente la Ec. [119] con los valores de $\Phi(\tau_i)$ correspondientes al exponente determinado.

Curvas límites superior e inferior.—Conviene siempre recordar la sencilla regla: a menores valores de n mayor longitud de curva. Por consiguiente, conviene emplear el

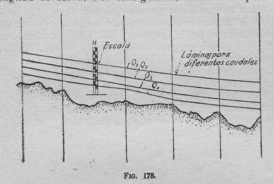


FIG. 178.

mayor o menor de los valores *de opción*, según que interese una curva límite inferior o superior. Análogo criterio debe presidir la interpolación cuando se manejan valores de n no especificados en las tablas.

Además, con relación a la pendiente de fondo, a mayor valor de y_0 mayor longitud de curva para una sobreelevación dada Z. Por consiguiente, en la determinación

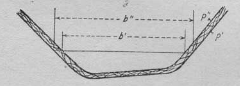


FIG. 174.—Perfiles envolventes interior y exterior.

del punto cero el proceso de extrapolación debe venir presidido por el propósito específico del proyecto.

Cuando no se dispone de suficientes datos hidrográficos, pueden dibujarse una serie de perfiles transversales (fig. 174) y determinar las envolventes interior y exte-

rior. El perfil envolvente interior dará lugar a curvas más largas y altas, y el exterior, por el contrario, a curvas más cortas y de menor incremento de nivel.

Método aproximado por cálculos breves.—Puede, finalmente, obtenerse un método rápido teniendo presente que los valores reales del exponente hidráulico oscilan entre 3,2 y 4,8 y rara vez salen del intervalo 3,4-4,4. En tales circunstancias, para un primer tanteo pueden tomarse como valores superior e inferior los límites dados, sin más detallado examen.

El lector comprobará que las curvas obtenidas por este procedimiento expedito no difieren sustancialmente de las que resultan con métodos más minuciosos.

PARTE III

HIDRAULICA DEL RESALTO

CAPITULO XVII

TEORIA DEL RESALTO

63. Introducción.—El resalto hidráulico, conforme se ha definido anteriormente, es un fenómeno local mediante el cual se verifica el tránsito, de una manera brusca, del régimen *rápido* al *lento*. Como se representa en la figura 175,

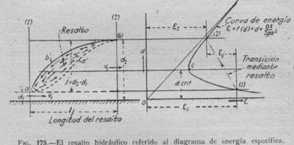


Fig. 175.—El resalto hidráulico referido al diagrama de energía específica.

donde el movimiento está referido al diagrama de la energía específica, el calado bajo d_1 antes del resalto, y el alto d_2 después del mismo, corresponden a los puntos 1 y 2 situados, respectivamente, en la rama inferior y superior de la curva de energía.

Las secciones 1 y 2 separan al resalto de las regiones adyacentes, en las que el movimiento es gradualmente variado y *paralelo*. La energía en las secciones 1 y 2 alcanza los valores

$$\varepsilon_1 = d_1 + \frac{Q^2}{2ga_1^2} \qquad [120]$$

$$\varepsilon_2 = d_2 + \frac{Q^2}{2ga_2^2}$$

La diferencia

$$\varepsilon_j = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \qquad [121]$$

representa la pérdida de altura de la línea de energía en el resalto. Las pérdidas de energía inherentes al resalto son del tipo de las que acompañan al *impacto*, es decir, pérdidas que acompañan generalmente a todo cambio rápido y brusco del movimiento. Por analogía con otros fenómenos de impacto, es de esperar que estas pérdidas sean grandes en comparación con las usuales debidas al rozamiento, en régimen uniforme o gradualmente variado.

Los calados d_1 y d_2, antes y después del resalto, se denominan *calados conjugados*. La distancia vertical $j = d_2 - d_1$ es la *altura* del resalto.

Nos proponemos en lo que sigue determinar una relación entre los calados conjugados, es decir, dados la forma del canal, el caudal Q y uno de los dos calados conjugados, determinar el otro. Las consideraciones energéticas ofrecen una explicación clara de la esencia física del fenómeno, pero no pueden servir de base para una teoría por la razón de que no existe un procedimiento directo para evaluar las pérdidas de energía en el resalto. Por otra parte, se obtiene una solución más satisfactoria aplicando el teorema de la cantidad de movimiento. Belanger, a principios del siglo pasado, fué el primero en aplicarlo al estudio del resalto, obteniendo resultados teóricos concordantes con las observaciones experimentales. En este punto no está de más llamar la atención sobre el hecho de que el teorema de la cantidad de movimiento se emplea generalmente en Dinámica de los cuerpos rígidos al estudiar el caso del impacto y que en Hidráulica se aplica a la determinación de las pérdidas causadas por un cambio brusco de forma de régimen en conducciones cerradas (Teorema de Borda).

Formas del resalto.—Hay dos formas distintas en que puede presentarse el fenómeno: la forma *directa* (fig. 176) y la forma *ondular* (fig. 177).

En la forma *directa* se alcanza prácticamente la cota superior por un ascenso continuo de la superficie libre. Observado en un canal con paredes de cristal se percibe una zona de expansión subyacente, cubierta por un rulo super-

ficial, donde las partículas describen circuitos cerrados y no participan del movimiento de traslación del líquido de la sección 1 a la sección 2.

La forma *directa* es típica de resaltos de relativa altura.

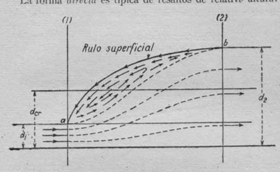


FIG. 176.—El resalto *directo*.

Se presenta generalmente en los resaltos que se producen en las estructuras hidráulicas.

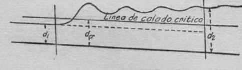


FIG. 177.—El resalto *ondular*.

La forma *ondular* es característica de los resaltos de altura relativamente pequeña. Se observa frecuentemente en cursos naturales de agua de pendiente moderada. La transición del nivel inferior al superior tiene lugar mediante una serie de ondulaciones de altura gradualmente decreciente. En casos en que el resalto es particularmente pequeño la superficie libre puede ser toda ella continua, como se representa en la figura 177. En otros casos (fig. 178) pueden formarse rulos locales superficiales en la primera o en varias ondas consecutivas.

Debe recordarse que el resalto, por la naturaleza del mismo, representa una ruptura del régimen, que de otra forma sería continuo. Sin embargo, se suele considerar como fenómeno permanente solamente en el sentido de presentar una forma *media* estable en un cierto período de

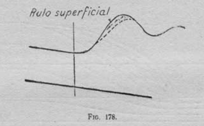


FIG. 178.

tiempo. Alrededor de estas posiciones medias se produce el fenómeno en estado de pulsación incesante. Esto se refiere tanto a la cresta como al pie del resalto, los cuales oscilan : el punto *a*, en la dirección del movimiento alrede-

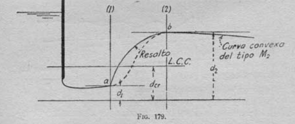


FIG. 179.

dor de una determinada posición media indicada por la sección (1), y el punto *b*, con componentes vertical y horizontal alrededor de la sección (2).

En tales circunstancias no siempre es fácil definir con precisión el *comienzo* y el *final* del resalto, ya que todo depende del tipo de éste y de las circunstancias que rodean al fenómeno.

Por ejemplo, en el resalto directo es fácil localizar el

comienzo del mismo por existir una línea de separación inconfundible entre la superficie tersa anterior y el rulo que se forma. Así, en el caso representado en la figura 179, el régimen después del resalto es con formación de una curva descendente del tipo M_2, determinándose el final del resalto y la sección frontera (2) por el punto de máximo calado d_2.

Con relación al resalto ondular, en el caso representado en la figura 180, donde el régimen rápido antes del resalto es uniforme y el calado d_1 es y_0 y, por tanto, fácilmente medible, pero siendo la parte superior una curva ascendente del tipo S_1, en este caso es prácticamente imposible deli-

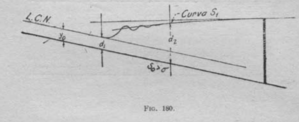


FIG. 180.

mitar el final del resalto debido a las ondas de pequeña curvatura que cubren una zona extensa.

Todas estas circunstancias afectan considerablemente a la precisión de las observaciones, siendo a considerar su efecto en los trabajos experimentales.

Un punto más merece aclaración antes de terminar estas notas preliminares. En general, hasta ahora, la teoría y las observaciones se han dirigido preferentemente a los elementos *verticales* del resalto, es decir, a los calados d_1 y d_2. Por otra parte, es muy escasa la investigación existente que oriente al ingeniero sobre los elementos longitudinales tales como la longitud del resalto, la forma más o menos exacta de la superficie, etc. También se conoce poco del mecanismo interno del fenómeno, distribución de velocidades y presiones, naturaleza y carácter de las pérdidas, etcétera. Hay aquí un amplio campo abierto a posibles investigaciones.

64. El teorema de la cantidad de movimiento.—Consideremos un caudal Q fluyendo por un canal prismático de forma dada (fig. 181), con pendiente horizontal. Aplicaremos el teorema de la cantidad de movimiento al líquido contenido entre las secciones 1 y 2. Siendo el régimen permanente la variación de la cantidad de movimiento en la dirección del eje X, por unidad de tiempo, es la diferencia entre la cantidad de movimiento del líquido que sale del espacio $aa'bb'$ a través de la sección (2) y la correspondiente al líquido que entra por la sección (1). La masa del líquido

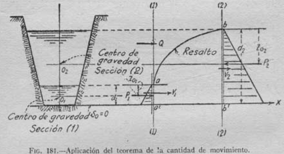


Fig. 181.—Aplicación del teorema de la cantidad de movimiento.

entrante y del saliente es la misma, igual a $\Delta Q/g$; por consiguiente, el incremento de cantidad de movimiento por unidad de tiempo es

$$\frac{\Delta Q}{g}(v_2 - v_1) \qquad [122]$$

Este incremento es igual a la impulsión de las componentes, según el eje X, de las fuerzas que actúan sobre el volumen líquido considerado. Como el movimiento es estacionario, la impulsión por unidad de tiempo es la suma total de las fuerzas de dirección X que actúan sobre o en el interior del volumen considerado. A continuación evaluaremos tales fuerzas.

Por ser $s_0=0$, el efecto de gravedad queda eliminado.

Nota.—La ventaja de considerar el resalto en canal con solera horizontal es precisamente que queda eliminado el

efecto de gravedad. En el caso de que no fuera horizontal el fondo, como en la figura 182, habría que sumar a las fuerzas que contribuyen a la variación de la cantidad de movimiento la componente $w \operatorname{sen} \alpha = w s_0$, donde w es el peso del volumen líquido $aa'bb'$. Esto requeriría conocer la longitud y forma del resalto, por lo que no se suele tener en cuenta. Tal aproximación, sin embargo, suele acarrear serias incongruencias.

Además, y aquí estriba la principal ventaja del empleo del teorema de la cantidad de movimiento, el efecto de todas y cada una de las fuerzas *internas* queda eliminado por

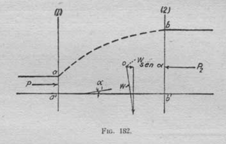


Fig. 182.

la sencilla razón de que cualquier fuerza que actúa en una determinada partícula a transmitida por la inmediata b es igual y opuesta a la que a transmite a b. En resumen, todos estos pares de fuerzas iguales y opuestas se anulan, quedando la suma de todas las fuerzas reducida a la de las fuerzas exteriores, que son, en nuestro caso:

1.ª Las resultantes P_1 y P_2 de las presiones hidrodinámicas que actúan sobre las secciones a_1 y a_2.

2.ª Las fuerzas externas de rozamiento Σf_w que actúan en la dirección opuesta al movimiento sobre la superficie del volumen líquido.

Como el movimiento en las secciones 1 y 2 se supone paralelo, la distribución de presiones hidrodinámicas en dichas secciones sigue la ley hidrostática. Por tanto, P_1 y P_2 son, respectivamente, iguales a $\Delta a_1 z_{01}$ y $\Delta a_2 z_{02}$, donde a_1 y a_2 son las áreas transversales, mientras que z_{01} y z_{02}

son las distancias de los centros de gravedad respectivos a la superficie libre. El teorema de los momentos establece:

$$\frac{\Delta Q}{g}(v_2 - v_1) = P_1 - P_2 - \Sigma f_w .$$

El único elemento indeterminado es la componente del rozamiento externo Σf_w. La hipótesis más simplista es la de suponer que estas fuerzas, debido a que es relativamente pequeña la longitud del resalto, son pequeñas comparadas con las internas, que son las causantes de la mayor parte de la pérdida de energía en el resalto, despreciándolas, por tanto. Esta hipótesis está sancionada por la experiencia, y, como luego se verá, la altura del resalto, determinada por el teorema de la cantidad de movimiento despreciando Σf_w, sólo es ligeramente superior a la observada en casos reales.

Suprimiendo Σf_w y sustituyendo Q/a por v se tiene:

$$\frac{\Delta Q}{g}\left(\frac{Q}{a_2} - \frac{Q}{a_1}\right) = \Delta\,(a_1 z_{01} - a_2 z_{02})$$

que puede ponerse en la forma:

$$\frac{Q^2}{g a_2} + a_2 z_{02} = \frac{Q^2}{g a_1} + a_1 z_{01} \qquad [123]$$

La ecuación, de forma análoga en uno y otro miembro, sugiere que los calados conjugados d_2 y d_1 corresponden a dos valores iguales de una cierta función

$$M_1(d) = \frac{Q^2}{ag} + a z_0 \qquad [124]$$

o, en otros términos, que la Ec. [123] puede ponerse en la forma

$$M_1(d_1) = M_1(d_2) \qquad [125]$$

Evidentemente, la curva M_1 tendrá dos ramas. Es, además, fácil demostrar que análogamente a la curva de energía $\varepsilon = f(d)$, la curva M_1 tiene un mínimo que corresponde al calado crítico. En efecto:

$$\frac{\partial M_1}{\partial d} = -\frac{Q^2}{g a^2}\cdot\frac{\partial a}{\partial d} + \frac{\partial}{\partial d}(a z_0) \qquad [126]$$

El primer término, en virtud de la Ec. [19], es igual a Q^2b/ga^2. El segundo es la derivada del momento estático de la sección transversal con relación al calado d. El valor de esta derivada puede obtenerse teniendo en cuenta la figura 183: sea az_0 el momento estático del área a, correspondiente al calado d, con relación a la línea de superficie libre b-b. Al sufrir el nivel un incremento ∂d, el momento con relación a la nueva línea b'-b' será:

$$a(z_0 + \partial d) + b\frac{(\partial d)^2}{2}$$

Fig. 183.

Despreciando el segundo término, de grado superior, el incremento de momento estático es

$$\partial(az_0) = a(z_0 + \partial d) - az_0 = a\partial d\ .$$

de donde

$$\partial(az_0)/\partial d = a \qquad [127]$$

y sustituyendo en la Ec. [126]

$$\frac{\partial M_1}{\partial d} = -\frac{Q^2 b}{ga^2} + a.$$

El valor mínimo de $M_1(d)$ corresponde a

$$\frac{\partial M_1}{\partial d} = a\left(1 - \frac{Q^2 b}{ga^3}\right) = 0$$

La expresión entre paréntesis es idéntica a $\partial\varepsilon/\partial d$ (ecuación [26]), lo que demuestra que la expresión $M_1(d)$ pasa por un mínimo a la vez que la línea de energía, es decir, para el calado crítico.

Cuando se dan la forma del canal y el caudal Q puede calcularse y dibujarse la curva M_1 por puntos (fig. 184). Cualquier vertical V que corte a la curva M_1 en los puntos 1_M y 2_M determina un par de calados conjugados d_1 y d_2. Evidentemente, hay un número infinito de posibles cala-

dos conjugados, correspondiendo cada par a una posible

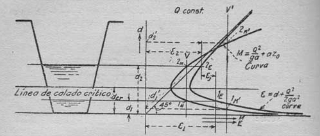


FIG. 184.—La curva $M(d)$ con el diagrama de energía

vertical. A cada valor d_1 corresponde uno y sólo un valor conjugado d_2, y *viceversa*.

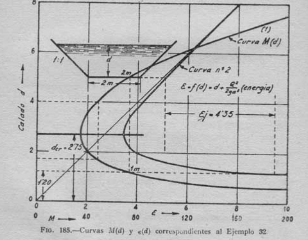


FIG. 185.—Curvas $M(d)$ y $\epsilon(d)$ correspondientes al Ejemplo 32

Si, además de la curva $M_1(d)$, dibujamos la curva de energía referida al mismo caudal Q, mediante ambas cur-

vas puede determinarse para cada caso la correspondiente pérdida de energía. En efecto: trazando horizontales por los puntos 1_M y 2_M cortarán a la curva de energía en los puntos 1_ε y 2_ε, cuya distancia en horizontal $\varepsilon_j = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ es la pérdida de energía en el resalto.

EJEMPLO 32

Un caudal $Q = 50$ m³/sg. discurre por el canal de la figura 14.

Cuestión 1.ª Calcular y dibujar la curva $M(d)$.

Refiriéndonos al Ejemplo 3, el calado crítico es, en nuestro caso, $d_{cr} = 2{,}75$ m. Para calcular $M_1 = \frac{Q^2}{ag} + az_0$, se tiene:

$$Q^2/ag = 50^2/a \cdot 9{,}81 = 275/a$$

$$z_0 = \frac{d\left(1 + \frac{d}{3}\right)}{2 + d}$$

Los cálculos se resumen en la Tabla XXXIX.

La curva se representa en la figura 185 (curva 1) juntamente con la curva de energía cuyos elementos se han tomado de la Tabla IV.

Cuestión 2.ª En las circunstancias anteriores de régimen, hallar el calado d_2 conjugado con $d_1 = 1{,}20$ m. Hallar también la pérdida de energía en el resalto.

En la figura 185 se traza una vertical por el punto 1_M de la curva M correspondiente a $d_1 = 1{,}40$. La intersección con la rama superior, en 2_M, determina el calado conjugado $d_2 = 5{,}00$. La altura del resalto es $j = 5{,}00 - 1{,}20 = 3{,}80$ m.

Trazando las horizontales por 1_M y 2_M se tiene:

$$\varepsilon_1 = 9{,}50 \text{ y } \varepsilon_2 = 5{,}15.$$

La energía perdida en el resalto es $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 9{,}50 - 5{,}15 = 4{,}35$ m. El cociente

$$\varepsilon_2/\varepsilon_1 = 0{,}542$$

mide la proporción de energía primitiva que subsiste en el líquido después del resalto. Evidentemente, $1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = 0{,}458$

expresa la proporción de energía inicial, disipada en los remolinos y rulos que acompañan al rápido cambio de régimen.

TABLA XXXIX

d	a	v	$275/a$	z_0	az_0	$M(d)$
0,50	1,25	40,000	220,000	0,233	0,291	220,291
1,00	3,00	16,666	91,666	0,444	1,333	93,000
1,50	5,25	9,524	52,381	0,643	3,376	55,757
2,00	8,00	6,250	34,375	0,833	6,666	41,041
2,50	11,25	4,444	24,444	1,018	11,452	35,896
3,00	15,00	3,333	18,333	1,200	18,000	36,333
3,50	19,25	2,597	14,285	1,378	26,526	40,811
4,00	24,00	2,083	11,459	1,555	37,320	48,779
4,50	29,25	1,709	9,402	1,731	50,631	60,033
5,00	35,00	1,429	7,857	1,905	66,675	74,532
5,50	41,25	1,212	6,666	2,077	85,676	92,342
6,00	48,00	1,042	5,729	2,250	108,000	113,729
7,00	63,00	0,749	4,365	2,592	163,296	167,661
8,00	80,00	0,625	3,437	2,933	234,640	238,077
9,00	99,00	0,505	2,777	3,273	324,027	325,804
10,00	120,00	0,417	2,292	3,611	433,320	435,612

Cuestión 3.ª Suponiendo que la cota d_2 después del resalto es $d_2 = 4$ m., determinar el calado d_1 correspondiente.

Este es el problema inverso. Una vertical (fig. 185) trazada por el punto correspondiente a $d_2 = 4$ m. corta a la rama inferior en el punto correspondiente a $d_1 = 1{,}70$ m.

65. LAS CARACTERÍSTICAS Q_{const} DEL RESALTO.—Aplicando el procedimiento indicado en el ejemplo anterior a una serie de verticales, se pueden resumir las características de todos y cada uno de los resaltos que pueden presentarse en un canal dado con el caudal dado Q mediante una serie de curvas que pueden denominarse propiamente *características Q_{const}*.

En relación con la figura 185, en la Tabla XL se acompañan los elementos de las características para $Q_{const} = 50$ m³/sg.

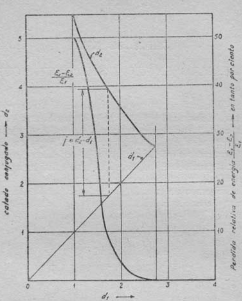


FIG. 186.—Curvas características Q=const. del resalto del Ejemplo 32.

los cuales se representan en la figura 186.

TABLA XL

d_1	d_2	ε_1	ε_2	$j=d_2-d_1$	j/d_1	$\varepsilon_1-\varepsilon_2$	$\varepsilon_2/\varepsilon_1$	$\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_1}$ porcentaje
1,20	5,00	9,50	5,15	3,80	3,17	4,35	0,542	45,80
1,50	4,30	6,12	4,50	3,00	2,00	1,62	0,735	26,50
1,80	3,85	4,45	4,15	2,35	1,30	0,30	0,933	6,75
2,00	3,55	4,00	3,85	1,85	0,92	0.15	0,963	3,75
2,20	3,30	3,75	3,70	1,50	0,68	0,05	0,988	1,33
2,50	2,90	3,50	3,48	1,00	0,40	0,02	0,995	0,57

CAPITULO XVIII

EL RESALTO EN UN CANAL RECTANGULAR

66. Relaciones fundamentales.—El método gráfico-analítico, desarrollado en el capítulo precedente, es completamente general y puede aplicarse a resaltos en canales prismáticos de forma cualquiera. Sin embargo, en ciertos casos particulares puede abordarse el problema por procedimientos puramente analíticos. El caso más importante es el del canal de sección rectangular.

Supongamos un caudal Q que fluye por un canal rectangular de ancho b, cuya solera es horizontal.

La Ec. [124] para un canal rectangular en el que

$$a = bd \; ; \; z = d/2 \; ; \; Q = q/b \; ; \; d^2_{cr} = q^2/g$$

es:

$$M(d) = \frac{Q^2}{gbd} + \frac{bd^2}{2} = b\left(\frac{q^2}{gd} + \frac{d^2}{2}\right)$$

y la Ec. [125]:

$$\frac{q^2}{gd_1} + \frac{d_1^2}{2} = \frac{q^2}{gd_2} + \frac{d_2^2}{2}$$

de donde

$$2q^2/g = d_1 d_2 (d_1 + d_2) \qquad [128]$$

La solución de esta ecuación simétrica es:

$$\left.\begin{aligned} d_2 &= \frac{d_1}{2}\left[-1 + \sqrt{1 + \frac{8q^2}{gd_1^3}}\right] \\ d_1 &= \frac{d_2}{2}\left[-1 + \sqrt{1 + \frac{8q^2}{gd_2^3}}\right] \end{aligned}\right\} \qquad [129]$$

Además, sacando el valor de q^2g de la Ec. [128] y sustituyendo en

$$\varepsilon_j = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = (d_1 - d_2) + \frac{q^2}{2g}\left(\frac{1}{d_1^2} - \frac{1}{d_2^2}\right)$$

y haciendo transformaciones se obtiene la pérdida de energía en el resalto

$$\varepsilon_j = (d_2 - d_1)^3 / 4 d_1 d_2 \qquad [130]$$

Finalmente, reemplazando en la Ec. [129] q^2/g por d^3_{cr} se tienen las ecuaciones en la forma:

$$\left.\begin{aligned} d_2 &= \frac{d_1}{2}\left[-1 + \sqrt{1 + 8\left(\frac{d_{cr}}{d_1}\right)^3}\right] \\ d_1 &= \frac{d_2}{2}\left[-1 + \sqrt{1 + 8\left(\frac{d_{cr}}{d_2}\right)^3}\right] \end{aligned}\right\} \qquad [131]$$

67. FORMA GENERALIZADA DE LA ECUACIÓN.—En el artículo 27 se ha introducido el concepto de *cineticidad del régimen*, representado por el factor

$$\lambda = 2\,\frac{v^2/2g}{d}$$

Para un canal rectangular

$$\lambda = d^3_{cr}/d^3 = q^2/gd^3$$

y la Ec. [129] toma la forma:

$$\left.\begin{aligned} d_2/d_1 &= {}^1/_2[-1 + \sqrt{1 + 8\lambda_1}\,] \\ d_1/d_2 &= {}^1/_2[-1 + \sqrt{1 + 8\lambda_2}\,] \end{aligned}\right\} \qquad [132]$$

a las que podemos acompañar las que dan los factores de cineticidad antes y después del resalto:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2}\,\frac{d_2}{d_1}\left(\frac{d_2}{d_1} + 1\right) \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2}\,\frac{d_1}{d_2}\left(\frac{d_1}{d_2} + 1\right) \end{aligned}\right\} \qquad [133]$$

Los valores conjugados de λ_1 *y* λ_2.—Sustituyendo (d_2/d_1) de la Ec. [132] en

$$\lambda_2 = (d_{cr}/d_2)^3 = (d_{cr}/d_1)^3 \cdot (d_1/d_2)^3 = \lambda \cdot \left(\frac{1}{d_2/d_1}\right)^3$$

y repitiendo la operación para $\lambda_1 = \lambda_2 \cdot \left(\frac{1}{d_2/d_1}\right)$ se obtienen las relaciones simétricas:

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1 &= 8\lambda_2/(-1+\sqrt{1+8\lambda_2})^3 \\ \lambda_2 &= 8\lambda_1/(-1+\sqrt{1+8\lambda_1})^3\end{aligned}\right\} \quad [134]$$

en las que los factores cinéticos de régimen λ_1 y λ_2 representan un par de valores conjugados d_1 y d_2.

Eficiencia del resalto.—El valor de la relación $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ representa lo que pudiera denominarse *eficiencia del resalto*. Puede expresarse en función de la cineticidad como sigue. Se tiene:

$$\varepsilon_2/\varepsilon_1 = \varepsilon_2/d_1 \cdot d_1/\varepsilon_1 = \varepsilon_2/d_2 \cdot d_2/d_1 \cdot d_1/\varepsilon_1$$

Sustituyendo d_2/d_1 (Ec. [132]) y teniendo en cuenta que $\varepsilon_1 = d_1\left(1+\frac{\lambda_1}{2}\right)$, de modo que $\frac{d_1}{\varepsilon_1} = \frac{1}{1+\frac{\lambda_1}{2}}$, y que, por otra parte,

$$\frac{\varepsilon_2}{d_2} = 1 + \frac{\lambda_2}{2} = 1 + \frac{1}{2}\left[\frac{8\lambda_1}{(-1+\sqrt{1+8\lambda_1})}\right]$$

se tiene:

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \left[1 + \frac{4\lambda_1}{(-1+\sqrt{1+8\lambda_1})^3}\right]\left[\frac{1}{2}(-1+\sqrt{1+8\lambda_1})\right]\left[\frac{1}{1+\frac{\lambda_1}{2}}\right]$$

que después de transformaciones convenientes toma la forma

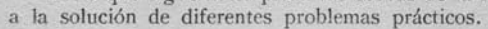
$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{1+8\lambda_1}) + \frac{2\lambda_1}{(-1+\sqrt{1+8\lambda_1})^2}}{1+\frac{1}{2}\lambda_1} \quad [135]$$

La pérdida relativa es $1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$, donde $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ se saca de la Ec. [135].

Las ecuaciones [132] a [135] no están limitadas por ninguna circunstancia particular del régimen. Son adimensionales y pueden aplicarse en general a resaltos en cana-

les rectangulares, expresando la relación fundamental entre los elementos en función de la coordenada generalizada adimensional, el factor λ. Representadas gráficamente (figura 187), son de aplicación para los resaltos en canales rectangulares formados bajo todas las condiciones posibles.

En lo que sigue se emplean las curvas de la figura 187 a la solución de diferentes problemas prácticos.



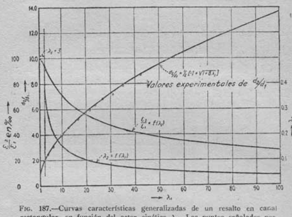


FIG. 187.—Curvas características generalizadas de un resalto en canal rectangular, en función del actor cinético λ_1. Los puntos señalados por círculos representan valores experimentales de d_2/d_1, obtenidos por el autor.

EJEMPLO 33

Supongamos un caudal de 20 m³/sg. fluyendo por un canal rectangular de 5 m. de ancho.

Cuestión 1.ª Dado $d_1 = 0{,}25$ m., determinar el calado conjugado d_2 y las pérdidas relativas en el resalto.

Se tiene:

$$q = 20/5 = 4 \text{ m}^3/\text{sg.}; \quad y_{cr} = \sqrt[3]{16/9{,}81} = 1{,}18 \text{ m.}$$

El factor cinético para $d_1 = 0{,}25$ es

$$\lambda_1 = (1{,}18/0{,}25)^3 = 105.$$

De la curva d_2/d_1 (fig. 187) se obtiene para $\lambda_1 = 105$,

$d_2/d_1 = 14$ y $\varepsilon_2/\varepsilon_1 = 0,266$; por tanto, $d_2 = 0,25 \times 14 = 3,5$ m. La energía inicial $\varepsilon_1 = d_1\left(1+\frac{\lambda_1}{2}\right) = 0,25\left(1+\frac{105}{2}\right) = 13,375$ m. La energía después del resalto es $\varepsilon_2 = 0,266 \times 13,375 = 3,557$ m. La pérdida de energía es $\varepsilon_j = 13,375 - 3,557 = 9,818$ m., o sea el *73,4 por 100.*

Cuestión 2.ª Determinar el calado d_1 que corresponde a $d_2 = 1,50$ m. Se tiene:

$$\lambda_2 = (d_{cr}/d_2)^3 = (1,18/1,5)^3 = 0,485.$$

El correspondiente valor de d_2/d_1 es 10,31 ; por tanto,

$$d_1 = 1,5/10,31 = 0,145 \text{ m}.$$

68. Las curvas características ε_1 = constante.—Sirven para determinar las características de los resaltos sometidos a la condición de que la energía ε_1 en la sección anterior al mismo permanece constante. Este caso se presenta con cierta aproximación en los resaltos formados aguas abajo de una compuerta (fig. 188), en la hipótesis de que permanezca constante el nivel A delante de la misma y, por consiguiente, la altura H. Si, además, se desprecian los ro-

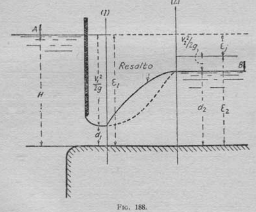


Fig. 188.

zamientos existentes entre el depósito A y la sección 1, la energía ϵ_1 en la sección 1 será constantemente igual a $H = d_1 + \frac{v_1^2}{2g}$.

Alzando o bajando la compuerta varía d_1 y con éste las demás características del movimiento. Por ejemplo, cuando la compuerta sube, la velocidad v_1 disminuye y el régimen se hace menos rápido mientras que el caudal q aumen-

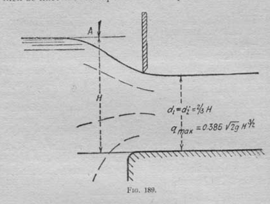


FIG. 189.

ta. Cuando d_1 toma el valor $2/3H$ se alcanza la condición límite que corresponde a la salida libre sobre un vertedero en pared gruesa. En tal caso $d_1 = d_{cr}$ y el caudal es máximo. Evidentemente, para $d_1 < 2/3H$ el régimen será rápido.

A cada valor de d_1 corresponde el conjugado d_2 determinado por la Ec. [129] o [132]. Este calado da la posición del estado superior del nivel B que puede mantenerse mediante un resalto de la altura $j = d_2 - d_1$.

Todas las características del movimiento pueden ponerse en función de d_1:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{2g(H-d_1)} = \sqrt{2gH\left(1-\frac{d_1}{H}\right)} \\ q &= v_1 d_1 = d_1\sqrt{2gH\left(1-\frac{d_1}{H}\right)} \end{aligned}\right\} \quad [136]$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= 2\,\frac{v_1^2/2g}{d_1} = 2\,\frac{H - d_1}{d_1} = 2\,\frac{1 - \dfrac{d_1}{H}}{d_1/H} \\ d_2 &= \frac{d_1}{2}\left[-1 + \sqrt{1 + 8\lambda_1}\right] = \frac{d_1}{2}\left[-1 + \sqrt{16\,\frac{H}{d_1} - 15}\right] \\ d_{cr} &= d_1\sqrt[3]{\lambda_1} = d_1\sqrt[3]{2\,\frac{1 - d_1/H}{d_1/H}} \end{aligned}\right\} \quad [136]$$

Conocido d_2 se determina $v_2 = q/d_2$ y, por tanto, la energía después del resalto es $\varepsilon_2 = d_2 + \dfrac{v_2^2}{2g}$. La pérdida de energía $\varepsilon_j = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ es $\varepsilon_j = H - \varepsilon_2$.

Las relaciones anteriores pueden ponerse en una forma más general y útil introduciendo los llamados *valores reducidos* de los parámetros. El valor reducido de d_1, que es la coordenada principal, es el cociente $d'_1 = d_1/H$. Los valores reducidos de los otros factores pueden obtenerse o bien directamente por las fórmulas [136] o por consideraciones de homogeneidad dimensional. Así, el valor reducido de la velocidad es $v'_1 = v_1/\sqrt{H}$; el del caudal, $q' = q/H\sqrt{H}$; el de la energía $\varepsilon'_1 = \varepsilon_1/H$ es la unidad. En función de $d'_1 = d_1/H$, los valores reducidos de los diferentes factores, obtenidos de las Ecs. [136], son:

$$\left.\begin{aligned} v'_1 &= v_1/\sqrt{H} = \sqrt{2g\,(1 - d'_1)} \\ q'_1 &= q\,/H\sqrt{H} = d'_1\sqrt{2g\,(1 - d'_1)} \\ \lambda_1 &= 2\,\frac{1 - d'_1}{d'_1} \\ d'_{cr} &= \frac{d_{cr}}{H} = d'_1\sqrt[3]{2\,\frac{1 - d'_1}{d'_1}} \\ d'_2 &= \frac{d_2}{H} = \frac{d'_1}{2}\left[-1 + \sqrt{\frac{16}{d'_1} - 15}\right] \end{aligned}\right\} \quad [137]$$

Por otra parte,

$$v'_2 = v'_1\,(d_1/d_2)$$

$$\varepsilon'_2 = \frac{\varepsilon_2}{H} = d'_2 + \frac{(v'_2)^2}{2g}$$

$$\varepsilon'_j = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{H} = 1 - \varepsilon'_2$$

Evidentemente, los valores reducidos representan los valores del respectivo factor para $H=1$. La tabla que sigue contiene los valores numéricos correspondientes a una serie de valores de d'_1.

TABLA XLI

d'_1	v'_1	q'	d'_{cr}	λ_1	d'_2	$(v_2^2/2g)'$	ε'_2	$1-\varepsilon$
0,010	4,405	,0440	0,058	198,00	0,195	0,0025	0,197	0,803
0,025	4,366	,1093	0,107	78,00	0,300	0,007	0,307	0,693
0,050	4,311	0,2153	0,168	38,00	0,411	0,014	0,425	0,575
0,075	4,255	0,3196	0,218	24,70	0,491	0,022	0,513	0,487
0,100	4,201	0,4201	0,262	18,00	0,552	0,029	0,581	0,419
0,150	4,085	0,6127	0,336	11,30	0,642	0,046	0,688	0,312
0,200	3,963	0,7949	0,400	8,00	0,706	0,064	0,770	0,230
0,250	3,831	0,9549	0,455	6,00	0,750	0,083	0,833	0,167
0,300	3,704	1,1150	0,501	4,66	0,780	0,104	0,884	0,116
0,350	3,565	1,2475	0,542	3,73	0,797	0,125	0,922	0,078
0,400	3,433	1,3744	0,577	3,00	0,800	0,150	0,950	0,050
0,450	3,278	1,4793	0,607	2,44	0,797			
0,500	3,129	1,5621	0,630	2,00	0,780			
0,550	2,969	1,6339	0,648	1,64	0,760			
0,600	2,798	1,6780	0,660	1,33	0,726			
0,650	2,616	1,7001	0,665	1,08	0,683			
0,666	2,555	1,7084	0,666	1,00	0,666			

Finalmente, en la figura 190 se representan las relaciones [137]. La figura constituye lo que denominaremos *curvas características* $\varepsilon_1=const.$ *del resalto*, las cuales pueden ser útiles en muchas aplicaciones prácticas y revelan algunas propiedades generales del resalto. Evidentemente, las ecuaciones [137] y la figura 190 no se limitan a la forma concreta de producción del resalto de la figura 188. Análogamente a la figura 187, la 190 es una característica general del resalto que ofrece las formas fundamentales del fenómeno en función de la relación

$$d'_1 = \frac{\text{energía potencial}}{\text{energía total}}$$

del régimen en la sección anterior al resalto. Por otra par-

te, la curva d'_2, que representa el valor reducido del calado d_2 conjugado con d_1, ofrece la relación de

$$\frac{\text{energía potencial}}{\text{energía total}}$$

después del resalto.

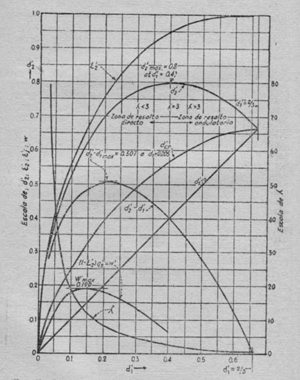


FIG. 190.—Características e constante, correspondientes a un resalto en canal rectangular.

La forma de la curva d'_2 enseña que el mayor valor de d'_2 es 0,8 y, por consiguiente, el estado de nivel máximo después del resalto se alcanza para $d'_1=0,4$, al cual le corresponde $\lambda_1=3$ y $\varepsilon'_2=0,95$. La pérdida de energía es de 5 por 100. Para valores de d'_1 superiores a 0,4, d'_2 decrece y la derivada $\partial d_2/\partial d_1$ se hace negativa.

El máximo de d'_2, correspondiente a $d'_1=0,4$, es de gran importancia física. Recordando que la cineticidad en dicho punto es $\lambda_1=3$, consideraremos el punto $d'_1=0,4$ como el que separa en dos zonas todas las condiciones posibles bajo las que puede tener lugar el resalto.

La región correspondiente a $d'_1 \leqslant 0,4$ y $\lambda_1 \geqslant 3$ la denominaremos zona de *altas cineticidades* y la región con $2/3 > d_1 > 0,4$ y con $\lambda_1 < 3$, de *bajas cineticidades*.

La distinción introducida es debida a la forma de producirse el resalto. En efecto: experiencias realizadas por el autor enseñan que en la zona de altas cineticidades ($\lambda_1 \geqslant 3$) el resalto tiene lugar bajo forma directa; además, el fenómeno es estable y los calados conjugados observados se aproximan con gran precisión a los valores teóricos. Por el contrario, en la región de bajas cineticidades ($\lambda_1 < 3$) el resalto adquiere forma ondular. Las ondas aumentan al decrecer λ y a medida que se reduce la cineticidad el fenómeno pierde estabilidad.

69. Experiencias con el resalto.—Huiremos de toda descripción detallada de experiencias, remitiendo al lector a las publicaciones originales (1). En términos generales, las experiencias realizadas sobre resaltos *directos* con gran cineticidad arrojan resultados concordantes con el teorema de la cantidad de movimiento y justifican plenamente la aproximación sugerida por Bélanger. En la figura 187 se han señalado algunos resultados de experimentos llevados a cabo por el autor (2). Los puntos experimentales siguen muy de cerca a la curva teórica. Los valores principales obtenidos fueron los siguientes:

(1) V. notas bibliográficas en el Apéndice.

(2) Para descripción detallada, véase *Ann. Polytech. Inst.* St. Petersburg, 1912. El canal medía 300×100 mm.; q por d. de ancho variaba de 1,7 a 15,6 l/sg.

q, en l/sg	d_1 mm.	λ_1	Observados		Calculados d_2/d_1	Desviación en %
			d_2	d_2/d_1		
15,60	83,0	4,26	200,0	2,415	2,46	− 1,83
12,60	62,5	6,50	189,0	3,03	3,13	− 3,19
9,26	44,0	10,00	170,5	3,88	4,00	− 3,00
6,64	32,5	12,80	149,0	4,58	4,59	− 0,22
5,42	26,0	16,60	135,0	5,20	5,31	− 2,08
4,46	21,0	21,50	123,5	5,90	6,08	− 2,96
3,32	16,0	26,80	109,0	6,81	6,82	− 0,14
3,08	14,5	31,05	104,0	7,18	7,40	− 3,14
2,62	12,5	35,10	97,0	7,77	7,89	− 1,52
2,06	10,0	42,50	87,0	8,70	8,74	− 0,46
1,70	8,0	56,10	80,5	10,05	10,12	− 0,70

La máxima cineticidad observada fué 56,1, correspondiéndole un valor de d_2/d_1 algo superior a 10.

Los calados d_2 observados fueron algo menores que los deducidos por las fórmulas, diferencia que procede de haber omitido en los razonamientos que han conducido a la fórmula la influencia de los rozamientos externos. Koch, Rehbock, Gibson y otros han obtenido también resultados concordantes con la teoría. Se puede afirmar que queda bien sentada la congruencia de la experimentación con la teoría en resaltos de alta cineticidad. Las experiencias del autor fueron hechas con un resalto provocado por el desagüe bajo una compuerta (fig. 188) en un canal con fondo horizontal. Cree el autor ser éste el mejor procedimiento para experimentar con resaltos, ya que, eliminado el efecto de gravedad, los factores indeterminados se reducen solamente a los rozamientos externos y, por otra parte, es posible provocar un régimen del grado de rapidez deseado.

En resaltos de pequeña altura obtenidos en circunstancias de baja cineticidad los resultados experimentales son menos satisfactorios. En numerosos casos, por ejemplo, los calados conjugados exceden a los valores teóricos. El autor interpreta ser ello debido a deficiencias inherentes al método de experimentación. Así, en las primeras experiencias los resaltos se producían generalmente insertando un obstáculo en un canal de fuerte pendiente, obteniéndose el ré-

gimen rápido uniforme por inclinación del cauce. En tales circunstancias, la cineticidad es generalmente baja ($\lambda<3$) y el resalto es de forma ondular, siendo difícil, entonces, realizar las medidas. Sin embargo, en opinión del autor, la principal fuente de error estriba en despreciar la influencia de la componente de gravedad (v. fig. 182). La longitud del resalto, para cineticidades bajas, es relativamente grande y, por otra parte, las pérdidas $\varepsilon_1-\varepsilon_2$, como se representa en la figura 190, son relativamente pequeñas. No es de extrañar, entonces, que la componente gravitatoria despreciada produzca un efecto que sobrepase al pasivo de las pérdidas, lo que conduce a valores de d_2 superiores a los teóricos.

Las débiles pérdidas inherentes a resaltos de baja cineticidad, como se pone de manifiesto en la figura 190, explican también por qué Bidone (1820) y Bélanger (1828) encontraron justificada la determinación de la relación existente entre los calados conjugados con la simple aplicación de la ecuación de Bernoulli. Ello quiere decir que se despreciaban las pérdidas en el resalto, tomándose ε_1 igual a ε_2. Sólo posteriormente, cuando las observaciones realizadas sobre resaltos de mayor altura evidenciaron discrepancias sustanciales, fué cuando Bélanger sugirió el empleo del teorema de la cantidad de movimiento.

Para poner en evidencia el efecto de la pendiente del fondo, el autor ha realizado una serie especial de experiencias cuyos resultados se resumen a continuación:

s_0 (pendiente del fondo)	d_1 mm.	d_2 mm.	h_j mm.
0,000	48,5	175,5	127,0
0,002	48,5	177,0	126,8
0,004	48,5	178,5	126,6
0,007	48,5	180,5	126,0
0,010	48,5	183,5	126,7
0,020	48,5	190,5	125,0

En estos experimentos, el calado d_1 y, por consiguiente, la cineticidad inicial se mantuvieron constantes. Al aumen-

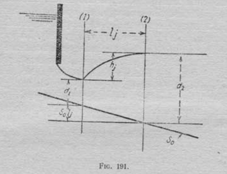


Fig. 191.

tar la pendiente, el valor observado de d_2 era cada vez mayor. Lo interesante fué, por otra parte, que la altura h_j (figura 191) del resalto, medida como distancia vertical entre los niveles superior e inferior, permaneció prácticamente invariable.

CAPITULO XIX

ACOTACION DEL RESALTO

70. EL RESALTO CONSIDERADO COMO ONDA ESTACIONARIA. En los capítulos XVII y XVIII se ha determinado la relación existente entre los calados d_1 y d_2 del resalto. Corresponde ahora establecer la acotación del mismo en la corrien-

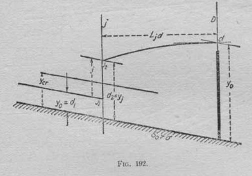


FIG. 192.

te en que se produce. Por ejemplo, en un curso de agua de pendiente fuerte (fig. 192) con un obstáculo D, se pide determinar la distancia L_{jd} de la presa al final del resalto.

NOTA. La longitud del resalto l_j (v. fig. 175) es generalmente pequeña en comparación con la longitud de las curvas de lámina libre adyacentes que tienen lugar en el régimen gradualmente variado. En efecto: la longitud de resalto será difícilmente apreciable cuando el perfil longitudinal superficial se dibuje a la escala reducida habitual. Por tanto, en la figura 192 y en las siguientes se representará esquemáticamente el resalto por una vertical, despreciándose su longitud.

Otro ejemplo expresivo es el de un río (fig. 193), cuya pendiente ofrece una discontinuidad pasando de fuerte $(s_{01}>\sigma)$ a suave $(s_{02}<\sigma)$. Para $y_{01}<y_{cr}$ e $y_{02}>y_{cr}$ como ca-

lados respectivos del régimen uniforme, la transición del régimen rápido al lento se realiza con formación de resalto. Hay que determinar la altura del resalto y, además, la zona del río en que se encuentra localizado, ya que la transición puede tener lugar de una de las dos formas esquematizadas en la figura 193; o bien, como en la 193, *a*, formándose en el tramo de pendiente fuerte y cubriendo una longitud L_{jo} de éste con formación de curva S_1, o bien sobre la zona de

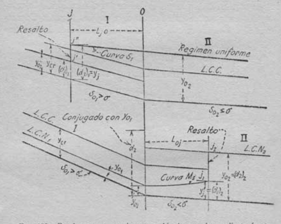


Fig. 193.—Resalto en un canal con cambio brusco de pendiente fuerte a suave: (*a*, superior) resalto en el tramo de pendiente fuerte; (*b*, inferior) resalto en el tramo de pendiente suave.

pendiente suave (193, *b*) con formación de curva M_3 y abarcando un trayecto L_{oj} de ella.

En ambos casos la localización del resalto significa determinar la longitud L de la sección 0 al respectivo extremo del resalto.

Los problemas de esta índole se simplifican elegantemente considerando el resalto como una *onda de traslación estacionaria*. Este expediente de aproximación fué empleado por Bazin, aunque actualmente se remonta a los primeros experimentos de Bidone (1820), quien, como ya se ha

mencionado anteriormente, produjo un resalto insertando un obstáculo D en un canal por el que circulaba el líquido en régimen rápido uniforme no perturbado (fig. 194). El obstáculo produce, al caer, *una intumescencia* de frente escarpado, que avanza hacia aguas arriba. A medida que se llena el embalse creado avanza la intumescencia, a partir de D, de suerte que la altura de la misma y su velocidad w (1) absoluta disminuyen gradualmente. En la figura 194 se ilustran las posiciones sucesivas de la intumescencia. Al

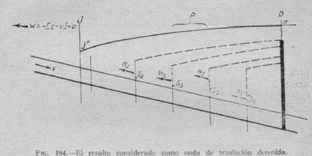


FIG. 194.—El resalto considerado como onda de traslación detenida.

final se alcanza la posición de equilibrio cuando el volumen de agua que fluye sobre el vertedero es igual al caudal del canal. Entonces se detiene la intumescencia en su avance. La velocidad v del agua fluyente coarta la natural tendencia de aquélla a avanzar, quedando transformada en una *onda estacionaria*: queda así formado el resalto hidráulico.

71. CELERIDAD DE PROPAGACIÓN DE UNA ONDA DE TRASLACIÓN.—Es fundamental, en primer lugar, determinar la *celeridad* con la que una intumescencia (fig. 195 *a*) o una onda solitaria (fig. 195 *b*) se propagan sobre la superficie de un líquido en reposo. Puede observarse que se emplea intencionadamente el término «celeridad» para diferenciar la velocidad con que la onda avanza en relación con

(1) w es negativa cuando el movimiento es hacia aguas arriba, contra la dirección positiva del eje X.

la superficie de la velocidad con que las partículas líquidas atraviesan una determinada sección transversal.

Un método más sencillo y elegante para tratar este

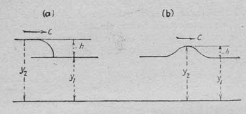


Fig. 195.—(*a*) Una intumescencia; (*b*) Onda solitaria de traslación.

problema fué sugerido por Saint Vénant (1870), cuyo razonamiento aplicaremos a un canal de sección arbitraria. Refiriéndonos a la figura 196, supongamos que en el canal dado el líquido está en reposo, alcanzando un calado y_1 e

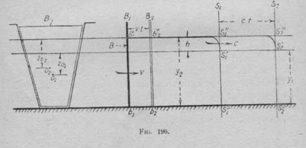


Fig. 196.

imaginemos, además, que un obstáculo plano, *B*, puede moverse a lo largo del canal, actuando como émbolo que desplaza al líquido ante él. El desplazamiento del líquido provocado por el movimiento del plano irá acompañado de la formación de una intumescencia de altura *h*, que se propagará sobre la superficie del agua con una celeridad *c*, diferente, y en general muy superior a la velocidad *v* del obstáculo, supuesta uniforme en este análisis. Supongamos ahora que en un cierto momento la posición del obstáculo

es B_1 cuando el pie de la intumescencia alcanza la sección S_1. A la derecha de S_1 el líquido está en reposo, mientras que en la intumescencia el agua ha entrado en movimiento impulsada por el pistón, tomando un calado $y_2 = y_1 + h$. En un lapso de tiempo t, el obstáculo avanza de B_1 a B_2 una distancia $v \cdot t$. En el mismo tiempo la intumescencia avanza de S_1 a S_2 una distancia $c \cdot t$. La relación entre los elementos del movimiento se obtiene por el siguiente razonamiento:

En primer lugar, el volumen de agua $b'_1 b''_1 b''_2 b'_2$, desplazado por el obstáculo, es evidentemente igual al $s'_1 s''_1 s''_2 s'_2$. Asignando por a_1 y a_2 las áreas transversales correspondientes a los calados y_1 e y_2, se tendrá:

$$a_2 vt = (a_2 - a_1) ct,$$

de donde

$$c = v \cdot \frac{a_2}{a_2 - a_1} \qquad [138]$$

Otra relación se obtiene por el teorema de la cantidad de movimiento:

La puesta en movimiento del volumen de líquido $s^0_1 s'_1 s'_2 s^0_2$, igual a $a_1 \cdot c \cdot t$ desde el estado de reposo al de movimiento uniforme con velocidad v, corresponde a un incremento de la cantidad de movimiento igual a $\frac{\Delta}{g} a_1 \cdot c \cdot t \cdot v$, el cual ha de ser igual a la impulsión, durante un tiempo t, de la diferencia de presiones hidrodinámicas que actúan a través de las secciones a_1 y a_2 anterior y posterior, respectivamente, a la intumescencia.

Designando, análogamente a la figura 181, las distancias de los centros respectivos de gravedad a la superficie libre por z_{01} y z_{02}, respectivamente, y despreciando las fuerzas de rozamientos externos que se producen entre las paredes y el líquido contiguo, se obtiene como diferencia de presiones hidrodinámicas $\Delta(a_2 z_{20} - a_1 z_{10})$. El teorema se expresa, por tanto:

$$\Delta(a_2 z_{02} - a_1 z_{01}) t = \frac{\Delta}{g} a_1 \cdot c \cdot v \cdot t,$$

de donde se obtiene:

$$v \cdot c = g \frac{a_2 z_{02} - a_1 z_{01}}{a_1} \qquad [139]$$

Eliminando v entre las Ecs. [139] y [138], se tiene:

$$\frac{c^2}{g} = \frac{a_2(a_2 z_{02} - a_1 z_{01})}{a_1(a_2 - a_1)} \qquad [140]$$

La Ec. [140] determina la celeridad de propagación de la intumescencia en un canal prismático en función del calado inicial y_1 y de la altura de la intumescencia $h = y_2 - y_1$.

Celeridad c en un canal rectangular.—En este caso $a = by$ y $z_0 = y/2$. La Ec. [140] deviene:

$$\frac{c^2}{g} = \frac{y_2\left(\frac{y_2^2 - y_1^2}{2}\right)}{y_1(y_2 - y_1)} = \frac{y_2}{2y_1}(y_2 + y_1)$$

y sustituyendo $y_2 = y_1 + h$:

$$\frac{c^2}{g} = \frac{y_1 + h}{2\,y_1}(2y + h),$$

de donde

$$c = \sqrt{gy_1}\sqrt{1 + \frac{3}{2}\frac{h}{y_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{y_1}\right)^2} \qquad [141]$$

En los casos en que la altura de la onda es pequeña, en comparación con el calado, se puede hacer:

$$C \simeq \sqrt{gy_1}\sqrt{1 + \frac{3}{2}\frac{h}{y_1}} \qquad [142]$$

y con menor aproximación se tiene la fórmula, que llamaremos de Saint Vénant:

$$C = \sqrt{gy_1}\left(1 + \frac{3}{4}\frac{h}{y_1}\right) \qquad [142a]$$

Cuando $\frac{h}{y_1}$ es muy pequeño, aún puede despreciarse dicho término, llegándose a la conocida *fórmula de Lagrange*:

$$c = \sqrt{gy_1} \qquad [143]$$

que da la velocidad de propagación de perturbaciones de pequeña altura sobre un líquido en reposo.

Fórmula simplificada para canales de forma cualquiera.—En canales de sección distinta de la rectangular pue-

den obtenerse fórmulas aproximadas del tipo de la Ec. [142] aplicables a casos en que la altura relativa de la intumescencia no es demasiado grande. En efecto: con relación a la figura 197 puede hacerse con suficiente aproximación

$$a_2 = a_1 + b_1 h$$

$$a_2 \delta_{20} = a_1 \delta_{10} + a_1 h + b \frac{h^2}{2}$$

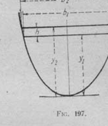


FIG. 197.

Sustituyendo en la Ec. [140] y desarrollando, se tiene:

$$\frac{c^2}{g} = \frac{a}{b} + \frac{3}{2} h + \frac{b}{2a} h^2 =$$

$$= \frac{a}{b} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{h}{a/b} + \frac{1}{2} \frac{h^2}{(a/b)^2} \right)$$

El valor de a/b es el calado medio de un canal (v. Ec. [41]). Sustituyendo, obtenemos:

$$c = \sqrt{g\delta} \cdot \sqrt{1 + \frac{3}{2} \frac{h}{\delta} + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{\delta} \right)^2} \qquad [144]$$

$$c \simeq \sqrt{g\delta} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{h}{\delta} \right) \qquad [145]$$

que para valores pequeños de h/δ da

$$c = \sqrt{g\delta}. \qquad [146]$$

Estas expresiones son análogas a las Ecs. [141] a [143]. En efecto: para un canal rectangular la celeridad se obtiene simplemente por las Ecs. [144] a [146], haciendo $\delta = a/b = y$. Al ser en un canal trapezoidal u otro cualquiera, de forma distinta de la rectangular $\delta = a/b$, siempre menor que y, las perturbaciones se propagan con una celeridad menor que en un canal rectangular de igual calado.

EJEMPLO 34

Cuestión 1.ª En un canal rectangular se supone $y_1 = 2{,}0$ metros y la altura de la intumescencia es $h = 0{,}20$, $0{,}40$ y $1{,}00$ m., respectivamente.

Calcúlese la celeridad por la Ec. [141] y compárense los resultados obtenidos, empleando las relaciones aproximadas de la Ec. [142].

La celeridad básica, según la fórmula de Lagrange, es $c=\sqrt{9{,}81\times 2{,}00}=4{,}45$ m/sg.; el valor del multiplicador para las diferentes fórmulas es:

h	$\frac{h}{y}$	$\sqrt{1+\frac{3}{2}\frac{h}{y}+\frac{1}{2}\left(\frac{h}{y}\right)^2}$	$\sqrt{1+\frac{3}{2}\frac{h}{y}}$	$1+\frac{3}{4}\frac{h}{y}$
0,20	0,1	1,073	1,072	1,075
0,40	0,2	1,149	1,140	1,150
1,00	0,5	1,370	1,322	1,375

Se ve que la fórmula de Saint Vénant (Ec. [142]) da resultados muy concordantes con los arrojados por la fórmula más exacta (Ec. [141]).

Cuestión 2.ª En el canal trapezoidal de la figura 14, con $y_1=2{,}00$ m., determínense las celeridades de ondas de alturas $h=0{,}20$, 0,40 y 1,00 m., aplicando la Ec. [145]. El calado medio para $y_1=2{,}00$ m. es $\delta=a/b=8/6=1{,}333$ m. La celeridad básica es $c=\sqrt{g\times 1{,}33}=3{,}63$ m/sg.

El valor del multiplicador es:

h	$\frac{h}{\delta}$	$1+\frac{3}{4}\frac{h}{\delta}$
0,20	0,150	1,113
0,40	0,301	1,226
1,00	0,752	1,565

Cuestión 3.ª Supongamos que un canal (fig. 198) de sección dada pone en comunicación dos depósitos que distan 3 Km. El fondo es horizontal y el agua está en reposo con $y=3$ m. Supongamos en un cierto momento que el agua comienza a salir del depósito A, ocasionándose un descenso del nivel de éste. Determinar el tiempo que transcurre hasta que dicho descenso de nivel se deje sentir en B, y, por tanto, comience a fluir del depósito B al canal.

Una pequeña depresión del nivel en A se propagará sobre el canal con la velocidad dada por la fórmula de Lagrange: $c=\sqrt{g\delta}$.

Se tiene en nuestro caso: $a=3(10+6)=48$ m²; $b=22$ metros; $\delta=48/22=2,18$ m., de modo que

$$c=\sqrt{g\times 2,18}=4,62 \text{ m/sg.}$$

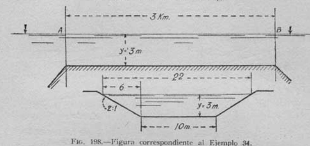


FIG. 198.—Figura correspondiente al Ejemplo 34.

El tiempo transcurrido, en minutos, será:

$$T=3\,000/4,62\times 60=10,8 \text{ min.}$$

72. DETENCIÓN DE UNA ONDA DE TRASLACIÓN.—Supongamos, ahora, que una intumescencia avanza contra co-

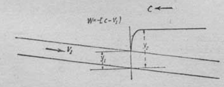


FIG. 199.—Detención de una intumescencia.

rriente, siendo la velocidad de ésta v_1 (fig. 199). La velocidad w del movimiento relativo de la intumescencia con relación al fondo del río será:

$$w=-[c-v_1] \qquad [147]$$

Mientras la celeridad sea mayor que la velocidad, la intumescencia se trasladará hacia aguas arriba; en caso contrario, hacia aguas abajo. Cuando c y v_1 sean iguales, se anulará w, dando por resultado la formación de un resalto. Empleando para c la Ec. [140], obtenemos que una onda quedará detenida cuando

$$\frac{v_1^2}{g} = \frac{c^2}{g} = \frac{a_2(a_2 z_{20} - a_1 z_{10}}{a_1(a_2 - a_1)} \qquad [148]$$

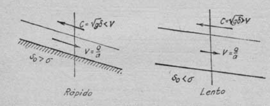


FIG. 200.—Distinción entre el régimen *lento* y *rápido* en función de la *celeridad* de propagación de las perturbaciones superficiales.

Multiplicando ambos miembros por a_1^2 y recordando que $v_1^2 a_1^2 = Q^2$, obtenemos:

$$\frac{v_1^2 a_1^2}{g} = \frac{Q^2}{g} = a_1 a_2 \frac{a_2 z_{20} - a_1 z_{10}}{a_2 - a_1}$$

que puede ponerse en la forma

$$\frac{Q^2}{g a_1} + a_1 z_{10} = \frac{Q^2}{g a^2} + a_2 z_{20} \qquad [149]$$

relación idéntica a la obtenida por el teorema de la cantidad de movimiento (Ec. [123]), que determina los calados conjugados antes y después del resalto. Por consiguiente, las relaciones entre los elementos hidráulicos de una onda de traslación detenida son las mismas que las existentes en el resalto. Ambos fenómenos son hidráulicamente equivalentes (1).

Distinción entre el régimen rápido y lento en función

(1) Véase el artículo publicado por el traductor con el título «Sobre la equivalencia hidráulica del resalto y la onda solitaria» en la *Revista de Obras Públicas*, agosto de 1946.

de la celeridad.—Introduciremos a continuación, como adición a lo expuesto en el artículo 24, otra distinción física de los regímenes lento y rápido. En efecto: una onda de traslación remontará un curso de agua siempre que su celeridad sea mayor que la velocidad de la corriente. Por otra parte, la celeridad depende de la altura de la onda. La celeridad mínima posible, en un canal de forma dada, *la celeridad básica*, es la dada por la fórmula de Lagrange, $c=\sqrt{g\delta}$.

Sea la velocidad v de la corriente, menor que $c=\sqrt{g\delta}$. En este caso cada perturbación, no importa de qué altura, se propagará hacia aguas arriba, hasta quedar totalmente amortiguada por las resistencias pasivas. Si, por el contrario, la velocidad v de la corriente fuese mayor que $c=\sqrt{g\delta}$, el fenómeno puede tener lugar de dos formas: si la intumescencia es de poca altura, la corriente arrastra a la onda, o si, por el contrario, la onda es suficientemente alta para que $c=\sqrt{g\delta}\left(1+\frac{3}{4}\frac{h}{\delta}\right)>v$, ésta remonta el curso de la corriente, con disminución gradual de altura, hasta llegar a un punto donde, por ser la celeridad igual a la velocidad v, la onda se detiene, formándose el resalto. En vista de lo que antecede, la velocidad $[v]$ igual a la celeridad de Lagrange:

$$[v]=c=\sqrt{g\delta} \qquad [150]$$

divide los posibles fenómenos en dos clases. Comparando las Ecs. [150] y [38], se ve que la velocidad $[v]$ es, precisamente, la velocidad crítica, correspondiente al régimen crítico.

De acuerdo con esto, siguiendo a Boussinesq, puede hacerse la siguiente distinción entre el régimen *rápido* y el *lento*:

En régimen *lento*, con $v<[v]=\sqrt{g\delta}$, la celeridad es siempre mayor que la velocidad de la corriente, de forma que toda intumescencia, cualquiera que sea su altura, se propagará indefinidamente hacia aguas arriba.

En régimen *rápido*, con $v>[v]=\sqrt{g\delta}$, una intumescencia, si es de suficiente altura, se detendrá finalmente, pro-

vocándose el resalto. Si, por el contrario, la intumescencia no es suficientemente alta, será arrastrada por la corriente.

Así se explica fácilmente el proceso de formación de las curvas de remanso en una corriente de agua. En un canal de pendiente suave con movimiento normal en estado lento, la entumescencia creada por una presa avanza hacia aguas arriba, disminuyendo progresivamente de altura, enlazando asintóticamente con el nivel de la corriente no perturbada. En el caso de un canal con pendiente fuerte, con régimen uniforme en estado rápido, la intumescencia provocada por un obstáculo de suficiente altura remontará el curso hasta un punto donde, debido a su altura mermada, se detendrá, formándose el resalto.

Relación entre la celeridad de propagación y la cineticidad del régimen.—Nos limitaremos al caso de un canal rectangular. En este caso la celeridad de una pequeña intumescencia es $c = \sqrt{gy}$, mientras que el factor cinético vale

$$\lambda = 2\,\frac{v^2/2g}{y}$$

Eliminando y entre las expresiones anteriores, se tiene:

$$\lambda = v^2/c^2 \qquad [151]$$

Es decir: la cineticidad es el cuadrado de la relación de la velocidad media del régimen a la celeridad de propagación de una pequeña intumescencia. En estado crítico, con $[v]=c$, la Ec. [150] da $\lambda=1$; en movimiento lento, con $[v]<c$, la cineticidad es $\lambda<1$. La velocidad con la que una pequeña intumescencia avanza, con relación al fondo, es:

$$w = -[c-v] = -c[1-\sqrt{\lambda}] = v\left[\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 1\right] \qquad [152]$$

73. ACOTACIÓN DEL RESALTO.—Teniendo presente lo anterior, es fácil acotar el resalto. Será mejor indicar, por separado, el proceso y razonamientos para cada caso concreto.

A) *Vertedero en un curso de agua torrencial* (fig. 192). Supongamos que el caudal es Q y que el calado del movimiento uniforme en régimen rápido es y_0. En D se esta-

blece un vertedero, que eleva el nivel al estado representado por y_D.

El problema estriba en establecer el tipo de fenómeno, y, en caso de que se produzca un resalto, determinar su situación y altura.

Procederemos, en primer lugar, determinando el calado d_2 conjugado con $d_1 = y_0$.

1.° $d_2 < y_D$, lo cual es el caso corriente. Esto quiere decir que el caudal dado fluyendo con un calado normal y_0, puede detener una intumescencia de calado d_2, el cual es menor que el calado correspondiente al nivel y_D creado por la presa. Por consiguiente, el nivel creado por la presa avanza hacia aguas arriba, hasta alcanzarse el perfil *J*, donde el calado y_j de la curva de lámina libre del tipo S_1 sea igual al d_2 anteriormente determinado. Al ser y_j igual a d_2, significa ello que la celeridad correspondiente a y_j es igual a la velocidad de la corriente y que la onda de traslación se encuentra detenida.

La situación del resalto se determinará hallando la posición de la sección *J* donde $y_j = d_2$. Esto se lleva a cabo calculando la longitud de la curva L_{jD} entre los calados y_D e y_j, siguiendo el procedimiento desarrollado en el Ejemplo 13, Cuestión 2.ª.

2.° $d_2 > y_D$. Esto significa que la corriente, en régimen uniforme, es capaz de mantener una onda de gran altura, como la ocasionada por la presa. En otros términos: la celeridad de la intumescencia es más pequeña que la velocidad de la corriente. La sobreelevación creada por el obstáculo no puede propagarse hacia aguas arriba, y la intumescencia creada es arrastrada por la corriente, sobrepasando con ella el mismo con formación de una *onda estacionaria*, como la descrita en el artículo 25.

B) *Canal con una discontinuidad de la pendiente del fondo.*—En relación con la figura 193, la cuestión primordial es determinar sobre cuál de ambos trayectos se ha de producir el resalto. En lo que sigue se supone que las longitudes, tanto del tramo de fuerte pendiente como del de suave, son lo suficientes para que se establezca en ellas el movimiento uniforme. Los calados *normales* son, respectivamente, y_{01} e y_{02}.

Para resolver el problema se comienza por determinar el calado d_2 conjugado con y_{01}, o en otros términos: se halla el nivel superior de la onda estacionaria que es capaz de mantener la corriente en régimen rápido, fluyendo por el tramo pendiente con un calado $y_{01}=d_1$. Se comparan entonces el calado conjugado d_2 hallado con el calado de régimen uniforme y_{02} en el tramo de pendiente suave. Pueden presentarse dos casos:

1.° $d_2>y_{02}$ (fig. 193). Cuando $d_2>y_{02}$, ello significa que la velocidad del régimen rápido en el tramo de fuerte pendiente excede a la celeridad de la onda correspondiente al calado uniforme y_{02}. Así, en la sección 0, el nivel y_{02} no es capaz de neutralizar la corriente y será repelido. El régimen rápido se extenderá dentro de la zona de pendiente suave mediante una curva del tipo M_3, hasta la sección J, donde alcanzado y'_j, igual al calado $(d_1)_2$ conjugado con el correspondiente al movimiento uniforme $y_{02}=(d_2)_2$. Para localizar el resalto, se determina el calado $(d_1)_2$ conjugado con el dado y se calcula la longitud L_{0j} de una curva M_3 entre los calados y_{01} e $y'_j=(d_1)_2$.

2.° $d_2<y_{02}$ (fig. 193 *a*). Esto significa que el calado y_{02}, que encuentra la corriente rápida en la sección 0, es mayor que el d_2 correspondiente al calado y_{01} que prevalece en el movimiento rápido. El nivel del régimen lento en el tramo II se trasladará hacia aguas arriba, en tal caso, extendiéndose dentro del tramo pendiente hasta el perfil J en que se alcanza y_j igual a d_2, conjugado con $d_1=y_{01}$.

Para localizar el resalto se determina $(d_2)_1$ conjugado con $(d_1)_1=y_{01}$, y luego se calcula la longitud L_{j0} de la curva S_1 entre los calados y_j e y_{02}.

Ejemplo 35

Un canal de sección representada en la figura 14 tiene una discontinuidad de pendiente (fig. 201). La pendiente del fondo en la zona suave es $s_{02}=8\ ^{00}/_{00}$ y en la zona escarpada $s_{01}=30\ ^{00}/_{00}$ y $s={}_{01}=190\ ^{00}/_{00}$, respectivamente. El caudal es $Q=50$ m³/sg. Empléense los coeficientes de Bazin.

Cuestión 1.ª Determínense en ambos casos el tipo de movimiento y la posición del resalto.

Con $Q=50$ m³/sg. se tiene, para movimiento uniforme (v. lámina III):

$s_0 = 8\ ^{00}/_{00}$; $\mathfrak{K}=Q/\sqrt{s}=1770$; $y_{02}=3{,}55$ m.

$s_0 = 30\ ^{00}/_{00}$; $\mathfrak{K}=Q/\sqrt{s}=914$; $y_{01}=2{,}62$ m.

$s_0=190\ ^{00}/_{00}$; $\mathfrak{K}=Q/\sqrt{s}=363$; $y_{01}=1{,}54$ m.

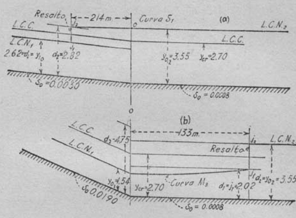


FIG. 201.—Figura correspondiente al Ejemplo 35.

El calado crítico se obtiene: $M_{cr}=Q/\sqrt{g}=15{,}95$, valor de M, que en la figura 15, corresponde a $y_{cr}=2{,}75$ m.

Con la curva $M(d)$ (fig. 185 ó 186) se obtienen los calados conjugados d_2 correspondientes a los respectivos de los tramos de pendiente fuerte:

Caso I (fig. 201 *a*): $s_{01}=30\ ^{00}/_{00}$; $y_{01}=d_1=2{,}62$ m.; calado conjugado, $d_2=2{,}82$ m.

Caso II (fig. 201 *b*): $s_{01}=50\ ^{00}/_{00}$; $y_{01}=d_1=1{,}54$ m.; calado conjugado, $d_2=4{,}75$ m.

El calado $(d_1)_2$ conjugado con $y_{02}=(d_2)_2=3{,}55$, es $d_1=2{,}02$.

En el caso I, el calado conjugado $d_2=2{,}82$ es menor que $y_{02}=3{,}55$ m., por consiguiente, el resalto tendrá lugar dentro del tramo de mayor pendiente, como se representa en la figura 193*a*.

En el caso II, $d_2=4{,}75$ es mayor que $y_{02}=3{,}55$, por lo cual el resalto se formará en el tramo de pendiente suave, como se representa en la figura 193 *b*.

Para localizar el resalto en el caso $s_{01}=30\ ^{00}/_{00}$, determinemos L_{j0}, es decir, la longitud de una curva S_1 entre $d_2=2{,}82$ e $y_{02}=3{,}55$.

Exponente hidráulico.—Para la región $y=2{,}82$ a $3{,}55$ con $y_0=2{,}62$, se tiene:

$$n=2\frac{\mathrm{Lg}\dfrac{\mathfrak{K}(3{,}55)}{\mathfrak{K}(2{,}62)}}{\mathrm{Lg}\dfrac{3{,}55}{2{,}62}}=2\frac{\mathrm{Lg}\,1{,}940}{\mathrm{Lg}\,1{,}355}=4{,}4$$

valor idéntico corresponde a:

$$\mathfrak{K}(2{,}82)/\mathfrak{K}(2{,}62)=(2{,}82/2{,}62)^{n/2}.$$

Valor de $1-\beta$.—El valor medio de τ para el intervalo de calados es $26{,}4\ ^{00}/_{00}$; por tanto:

$$\beta=s_0/\tau=30/26{,}4=1{,}135\ ;\quad 1-\beta=-0{,}135.$$

Interpolando los valores de $B(\eta)$ entre las columnas de la Tabla correspondientes a $n=4{,}2$ y $n=4{,}6$, se tiene, para $n=4{,}4$:

$$\eta_2=3{,}55/2{,}62=1{,}355\ ;\quad B(\eta_2)=0{,}122\ ;\quad z_2=1{,}355-(-0{,}135)\,0{,}122=1{,}371$$

$$\eta_1=2{,}82/2{,}62=1{,}076\ ;\quad B(\eta_2)=0{,}385\ ;\quad z_1=1{,}076-(-0{,}135)\,0{,}385=1{,}128$$

La distancia L_{j0} de la sección 0 al final del resalto en $y_j=d_2=2{,}82$, es:

$$L_{j0}=2{,}62/30\cdot 10^{-3}[1{,}371-1{,}128]=214\ \text{m}.$$

Para localizar el resalto en el caso $s_{02}=180\ ^{00}/_{00}$, determinaremos (fig. 193 *b*) la longitud L_{0j} de una curva M_3 entre los calados 1,54 y 2,02.

Exponente hidráulico.—Para el intervalo de calados entre $y=1{,}54$ e $y=2{,}02$, con $y_0=3{,}55$, se tendrá un valor medio

$$n = 2\,\frac{\mathrm{Lg}\,\dfrac{\mathbf{K}\,(3{,}55)}{\mathbf{K}\,(1{,}80)}}{\mathrm{Lg}\,\dfrac{3{,}55}{1{,}80}} = 2\,\frac{\mathrm{Lg}\,3{,}94}{\mathrm{Lg}\,1{,}80} = 4{,}05$$

Valor de $1-\beta$.—El valor medio de σ en el intervalo es $=28^{00}/_{00}$; $\beta=8/28=0{,}286$; $1-\beta=0{,}174$. Interpolando valores de $B\,(\eta)$, se tiene :

$\eta_2=2{,}02/3{,}55=0{,}570$; $B\,(\eta)=0{,}583$; $\pi_2=0{,}570-$
$-0{,}714\times0{,}583=0{,}154$

$\eta_1=1{,}54/3{,}55=0{,}434$; $B\,(\eta)=0{,}437$; $\pi_1=0{,}434-$
$-0{,}714\times0{,}437=0{,}122.$

La distancia L_{0j} de la sección 0 al rulo del resalto es :

$$L_{0j} = \frac{3{,}55}{8\cdot10^{-4}}\,[0{,}154-0{,}122]=133 \text{ m.}$$

CAPITULO XX

EL RESALTO AGUAS ABAJO DE UNA COMPUERTA DE REGULACION

En Ingeniería Hidráulica se presenta un número importante de casos en que pueden emplearse las curvas de la figura 190 y la Ec. [137].

74. Altura efectiva.—Cuando se emplean las curvas y se calculan los *valores reducidos*, es preciso referir el

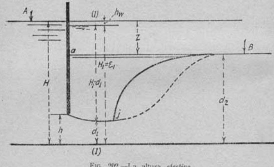


Fig. 202.—La altura *efectiva*.

calado d_1 y los demás elementos del régimen a la *altura efectiva*, que es la altura total H_1 de la línea de energía en la sección 1 de la vena fluyente (fig. 202). Esta altura efectiva difiere de H en las pérdidas h_w.

Con el coeficiente de velocidad φ para determinar $v_1 = \varphi\sqrt{2g(H-d_1)}$, la altura efectiva será:

$$H_1 = d_1 + \frac{v_1^2}{2g} = d_1 + \varphi^2(H-d_1) = H\left[\varphi^2 + \frac{d_1}{H}(1-\varphi^2)\right] = \delta H \quad [153]$$

y las pérdidas

$$h_w = H - H_1 = (1 - \varphi^2)(H - d_1) = (1 - \vartheta)H.$$

Por ser convenientes para los cálculos, en la figura 203 se representan los valores de:

$$\vartheta = \varphi^2 + \frac{d_1}{H}(1 - \varphi^2) \qquad [154]$$

75. Desagüe libre o sumergido.—En la figura 202 se suponen dados: la posición del nivel A, aguas arriba, y el

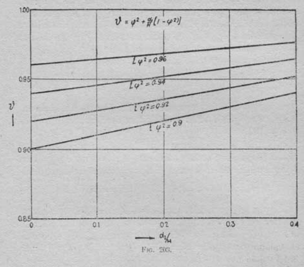


Fig. 203.

nivel B, aguas abajo de la compuerta, así como la apertura h de ésta y el coeficiente de contracción α que determina el espesor mínimo $d_1 = \alpha h$.

Según los casos, el desagüe puede bien ser *sumergido*, bien *libre*.

En el desagüe sumergido, el caudal o gasto de la compuerta dependerá del escalón Z, es decir, de la distancia vertical entre los niveles A y B.

En el caso de desagüe libre, el caudal dependerá de la altura $H-d_1$, pudiendo ser considerablemente mayor, así como también la velocidad y la acción erosiva de la vena líquida.

Para establecer el tipo de régimen se determina primeramente el calado d_2 conjugado con d_1, suponiendo el desagüe libre.

1.° $d_2 < y_B$. Si el calado conjugado d_2, tal como se ha determinado, es menor que y_B correspondiente al nivel B, el desagüe será sumergido.

2.° $d_2 > y_B$. Si el calado conjugado d_2 determinado es mayor que y_B, se formará un resalto, y el desagüe será libre. Generalmente el resalto será de la máxima altura posible cuando $y_B = d_2$, es decir, cuando el rulo del resalto quede localizado en la *vena contraída*. En el caso de $d_2 > y_B$ el resalto será repelido hacia aguas abajo.

EJEMPLO 36

Supongamos una compuerta rectangular, con $H=5$ m. y $h=2$ m. (fig. 204). Sea el coeficiente de contracción $\alpha=0,62$ y $\varphi^2=0,92$.

Cuestión 1.ª Supóngase que la cota B toma las posiciones respectivas correspondientes a $y_B=4$ m. e $y_B=3$ m. y determínese en cada caso el tipo y caudal de desagüe.

$$d_1 = \alpha h = 0,62 \times 2 = 1,24 \text{ m.}; \quad d_1/H = 0,248 \simeq 0,25$$

Según la figura 203, para $\varphi^2=0,92$, $\delta=0,94$, y la altura efectiva será $H_1=4,70$ m. El valor reducido de d_1, referido a H_1 es $d'_1=1,24/4,70=0,264$. De la figura 190 se obtiene el calado conjugado $d'_2=0,755$. Por tanto, $d_2=0,755 \times 4,7=3,55$ m.

Con $y_B=4$ m., $y_B > d_2$, el desagüe es sumergido.

$$Z=5-4=1 \text{ m.}; \; q=h\alpha\varphi\sqrt{2gZ}=2\times 0,6\times\sqrt{2g\times 1}=3,67 \text{ m}^3/\text{sg}.$$

En el caso $y_B=3$ m., $y_B < d_2$, el desagüe es libre:

$$q=\varphi \cdot d_1\sqrt{2g(H-d_1)}=0,96\times 1,24\times\sqrt{2g\times 3,76}=10,25 \text{ m}^3/\text{sg}.$$

Cuestión 2.ª Determinar el nivel máximo compatible con el desagüe libre.

El nivel máximo es $y_B = d_2 = 3,55$ m., antes determinado.
Para $y_B \leqslant 7,1$, el desagüe permanecerá constante e igual a 10,25 m³/sg.

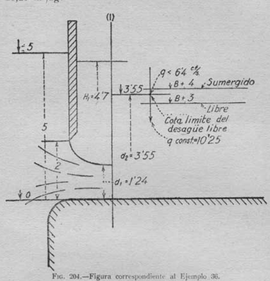


FIG. 204.—Figura correspondiente al Ejemplo 36.

En cuanto el nivel B sobrepase $y_B = 3,55$ m., la vena líquida quedará anegada, descendiendo el desagüe súbitamente al valor:

$$q = 2 \times 0,6 \times \sqrt{2g \times 1,45} = 6,4 \text{ m}^3/\text{sg}.$$

76. RÉGIMEN EN UN CANAL AGUAS ABAJO DE UNA COMPUERTA DE REGULACIÓN.—En lo que antecede se ha supuesto conocido el nivel B aguas abajo. Tal sería el caso si la compuerta estuviese, por ejemplo, situada entre dos depósitos (fig. 205) muy próximos. En este caso el estado natural de nivel aguas abajo de la compuerta sería el calado correspondiente al nivel del depósito B.

Pero cuando la longitud del canal, después de la com-

puerta, es apreciable, el estado de niveles detrás de ésta viene influído por las circunstancias del régimen del canal. Evidentemente, en tal caso, el desagüe bajo la compuerta y movimiento gradualmente variado en el canal guardan entre sí estrecha conexión.

El razonamiento, aplicable a problemas de esta índole, lo ilustramos a continuación considerando el caso de un canal de pendiente suave, que termina en un escalón (figura 206). En lo que sigue se supondrá que las líneas de corriente sobre el escalón no sufren perturbación. Hablando en términos generales, el tipo del movimiento dependerá de la longitud del canal y de su pendiente. Por ejemplo,

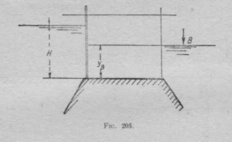


FIG. 205.

en un canal corto (fig. 206, I) el régimen puede continuar rápido sobre toda la longitud del mismo, siendo la superficie libre 1—*f* una curva ascendente del tipo M_3 que alcanza el borde del escalón antes de llegarse al calado crítico. En la figura 206, II, por otra parte, el canal es lo suficientemente largo para que se establezca en él el régimen uniforme. El movimiento es rápido hasta la sección *J*, donde se enlaza, mediante resalto con el régimen uniforme, de calado $y_0 = d_2$.

La figura 206, III, representa un caso intermedio. El régimen entre *A* y *J* es rápido; después del resalto la superficie libre es la curva descendente $j''-c$, del tipo M_2.

En todos los casos anteriores se ha impuesto el desagüe libre. Ahora bien, en las figuras 206, II, y 206, III, el desagüe podría ser sumergido, quedando anegada la vena y

alcanzando el nivel del régimen lento la cara posterior de la compuerta (representado con líneas de trazos). Para establecer el tipo de desagüe supongamos el desagüe libre con un caudal Q_f y determinemos el calado d_2 conjugado con el calado y_1 de la vena fluyente. Después se calcula

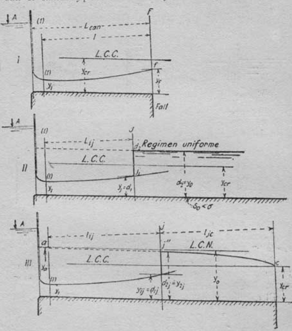


FIG. 206.—Régimen en un canal tras una compuerta de regulación.

el calado y_a en la sección inmediatamente posterior a la compuerta para el caudal Q_f, con desagüe libre, suponiendo que el calado sobre el escalón es y_{cr} (fig. 206, III). Si y_a, así determinado, es menor que d_2, el desagüe será libre, y en el caso contrario será sumergido.

Ejemplo 37

Una compuerta regula la toma de un canal de sección rectangular (fig. 207) tipo *C*, revestido de cemento. $H=3$ m.; la apertura de la compuerta es $h=1{,}50$ m.; $\alpha=0{,}62$; $\varphi^2=0{,}90(\varphi=0{,}95)$; $d_1 1{,}5\times 0{,}62=0{,}93$ m.; $q=0{,}95\times 0{,}93\times \times\sqrt{2g(3-0{,}93)}=5{,}63$ m³/sg.; $Q=5\times 5{,}63=28{,}15$ m³/sg.

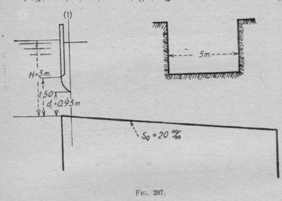


Fig. 207.

Cuestión 1.ª Dada la longitud del canal $L=100$ m. y $s_0=20^{00}/_{00}$, determinar el tipo de régimen.

Siendo el canal corto, el movimiento puede ser el representado en la figura 206, I. Para establecer el tipo de régimen determinemos:

El calado normal y_0.

$$\mathfrak{K}_0=Q/\sqrt{s_0}=630 \text{ e } y_0=1{,}85 \text{ m.}$$

El calado crítico

$$y_{cr}=\sqrt[3]{q^2/g}=1{,}48 \text{ m.}$$

Para determinar si el régimen es rápido sobre toda la longitud del canal, determinemos (fig. 208) la longitud de una curva M_3 entre los calados $y_1=0{,}93$ e $y_{cr}=1{,}48$ m.

Emplearemos las tablas de la función del régimen variado con $n=3{,}2$. Las pendientes críticas para $y=1{,}00$ e

$y = 1{,}50$ son, respectivamente (v. lámina IV), $\sigma = 33{,}34$ y 35,59. Los valores de β son: $20/33{,}34 = 0{,}60$ y $20/35{,}59 = 0{,}56$, $1 - \beta = 0{,}400$ y $0{,}440$, pudiendo tomarse el valor medio 0,42.

$$\eta_1 = 0{,}93/1{,}85 = 0{,}502\ ;\ B(\eta_1) = 0{,}516\ ;\ \Pi_1 = 0{,}502 - 0{,}42 \times \times 0{,}516 = 0{,}285$$

$$\eta_2 = 1{,}48/1{,}85 = 0{,}800\ ;\ B(\eta_2) = 0{,}934\ ;\ \Pi_2 = 0{,}800 - 0{,}42 \times \times 0{,}934 = 0{,}408$$

La longitud de la curva

$$L = \frac{1{,}85}{0{,}002}\,[0{,}408 - 0{,}285] = 114 \text{ m}.$$

es algo superior a la del canal de 100 m., de forma que el régimen es el representado en la figura 206, I, conforme se había supuesto.

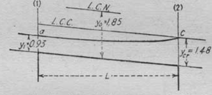


FIG. 208.—Curva del Ejemplo 37, Cuestión 1.ª

Cuestión 2.ª Determinar el tipo de régimen y acotar el resalto, si lo hay, en la hipótesis de que el canal tenga 1 500 m. de longitud.

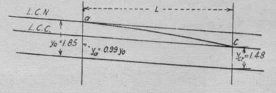


FIG. 209

El canal parece tener una longitud suficiente para que

el nivel de aguas abajo, después de la compuerta, se pueda considerar como el calado normal, de forma que en la figura 206 y_a es y_0. Para comprobar si esta hipótesis es correcta determinemos la longitud de una curva descendente M_2 (figura 209) entre el calado crítico $y_2 = y_{cr} = 1{,}48$ m. y el final de la misma suponiendo $y_a = 0{,}99 \times y_0 = 1{,}83$ m.

Para el cálculo de $1-\beta$ en el intervalo se tiene:

$$y = 1{,}50\ ;\ \sigma = 35{,}59\ ;\ \beta = 0{,}560\ ;\ 1-\beta = 0{,}440$$
$$y = 1{,}85\ ;\ \sigma = 37{,}6\ ;\ \beta = 0{,}532\ ;\ 1-\beta = 0{,}468$$

tomamos un valor medio $1-\beta = 0{,}454$.

Empleando el exponente $n = 3{,}2$:

$$\eta_2 = 1{,}48/1{,}85 = 0{,}800\ ;\ B(\eta_2) = 0{,}934\ ;\ \Pi_2 = 0{,}800 - 0{,}454 \times \times 0{,}934 = 0{,}377$$

$$\eta_1 = 0{,}99\ ;\ B(\eta_1) = 1{,}940\ ;\ \Pi_1 = 0{,}99 - 0{,}454 \times 1{,}940 = -0{,}110$$

$$L = 925\ [0{,}377 - 0{,}110] = 247 \text{ m.}$$

esta longitud es menor que $L_{canal} = 1\,500$ m.; por tanto, $y_a \simeq y_0 = 1{,}85$ m.

Para determinar el tipo de régimen calculemos el calado d_2 conjugado con $d_1 = 0{,}93$ en la *vena contracta*.

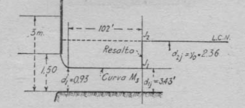


FIG. 210.—Curva M_3 del Ejemplo 37. Cuestión 2.ª

Con $\varphi^2 = 0{,}9$ y $d_1/H = 0{,}31$ se tiene (fig. 203) $\varepsilon = 0{,}93$, de donde $H_1 = 2{,}79$.

El valor reducido de $d'_1 = 0{,}93/2{,}79 = 0{,}333$. El calado conjugado reducido (fig. 190) es $d'_2 = 0{,}785$; por tanto, $d_2 = 0{,}785 \times 2{,}79 = 2{,}19$ m. Siendo $d_2 > y_a = 1{,}85$ el desagüe es libre, con resalto despegado.

Para localizar el resalto (fig. 210) se determina prime-

ramente el calado $y_i = d_{1l}$ conjugado en el resalto con $d_{2l} = y_0 = 1{,}85$. Aplicando la Ec. [131] se tiene:

$$d_1 = \frac{d_2}{2}\left[-1+\sqrt{1+8\left(\frac{d_{cr}}{d_2}\right)^3}\right] = \frac{1{,}85}{2}\left[-1+\sqrt{1+8\left(\frac{1{,}48}{1{,}85}\right)^3}\right] =$$
$$=1{,}165 \text{ m}.$$

La posición del resalto se determina hallando la longitud de la curva M_3 (fig. 206, II) entre $y_1 = 0{,}930$ e $y_{1l} = 1{,}165$

Tomando $1-\beta = 0{,}40$ se tiene para $n = 3{,}2$:

$$\eta_1 = 0{,}93/1{,}85 = 0{,}502\ ;\ B(\eta_1) = 0{,}516\ ;\ \Pi_1 = 0{,}502 - 0{,}40 \times$$
$$\times 0{,}516 = 0{,}296$$

$$\eta_2 = 1{,}165/1{,}85 = 0{,}628\ ;\ B(\eta_2) = 0{,}672\ ;\ \Pi_2 = 0{,}628 - 0{,}40 \times$$
$$\times 0{,}672 = 0{,}360$$

$$L_{1l} = 925\,(0{,}360 \times 0{,}296) = 59 \text{ m}.$$

Cuestión 3.ª Determinar el tipo de régimen y localizar el resalto en el caso de que la longitud del canal fuese 120 m. (fig. 206, III). Se procederá como sigue (fig. 211):

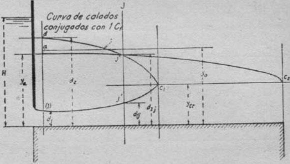


FIG. 211.—Acotación del resalto en el caso de la figura 206, III.

Se dibuja la curva M_3 (1-c_1), correspondiente al régimen rápido libre, de d_1 a y_{cr} en el perfil C_1. Luego, la curva descendente M_2 (c_2-a) partiendo de y_{cr} en el perfil C_2 correspondiente al borde del escalón límite del canal a y_a tras la compuerta.

Empleando la Ec. [129] ó [131] se calcula y dibuja la curva c_1-d de calados conjugados correspondientes a las ordenadas de la curva M_3 (1-c_1). El punto de intersección j'' de la curva c_1-d con la curva M_2 determina la posición del resalto, así como los calados respectivos d_{2j} y d_{1j}. La incertidumbre de la solución estriba en despreciar la longitud del resalto. Sin embargo, siempre y cuando la sección J se haya de encontrar en la zona aplanada de la curva descendente, el error no será sustancial.

Será también expedito, en general, prescindir de la distancia entre la compuerta y la *vena contracta*, admitiendo simplemente que la longitud entre la sección 1 y el escalón es igual a la longitud total del canal.

Refiriéndonos al ejemplo numérico:

Curva M_3.—La longitud total, determinada en la Cuestión 1.ª, es 114 m. Para la *vena contracta* se tiene $y_1 = d_1 = 0{,}93$ m. y $\Pi(\eta_1) = 0{,}285$. La coordenada x''' (fig. 212) para cualquier calado y''' es $x''' = 925\ [\Pi(\eta_2) - 0{,}285]$, donde $\Pi(\eta_2) = \eta_2 - 0{,}42\, B(\eta_2)$ con $\eta_2 = y'''/1{,}85$.

De acuerdo con esto se tiene el siguiente cuadro, para $n = 3{,}2$:

TABLA XLII

(1) y'''	(2) η_2	(3) $B(\eta_2)$	(4) $\Pi(\eta_2)$	(5) $\Pi(\eta_2)$ 0,285	(6) x'''	(7) d_2
0,93	0,503	....	....	....	0	2,215
1,10	0,595	0,625	0,333	0,048	44,4	1,939
1,20	0,649	0,695	0,357	0,072	66,5	1,801
1,30	0,703	0,770	0,379	0,094	87,0	1,676
1,40	0,758	0,857	0,398	0,113	104,5	1,564
1,48	....	....	....	....	114,0	1,480

La curva 1—c_1 se dibuja a la escala apropiada en la fig. 213.

Curva de calados conjugados d_2.—Los valores de d_2, calculados por la fórmula

$$d_2 = \frac{y'''}{2}\left[-1 + \sqrt{1 + 8\left(\frac{1{,}48}{y'''}\right)^3}\,\right]$$

se acompañan en la columna (7) y representan en la figura 213, curva a-c_1.

Curva descendente M_2.—Hemos visto (Cuestión 2.ª) que para la sección C_2 sobre el escalón $y_2 = y_{cr} = 1{,}48$; $1 - \beta = 0{,}454$; $\Pi(\eta_{cr}) = 0{,}377$. La coordenada x'' (fig. 212), co-

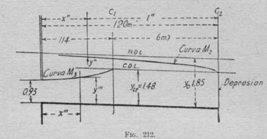


FIG. 212.

rrespondiente al calado y'', será $x'' = 300 - l'' = 120 - 925 [0{,}377 - \Pi(\eta)]$, teniéndose:

y''	η	$B(\eta)$	$\Pi(\eta)$	$0{,}377 - \Pi(\eta)$	l''	x''
1,758	0,95	1,432	0,300	0,077	71,2	48,8
1,72	0,93	1,311	0,335	0,042	38,8	81,2
1,70	0,92	1,266	0,346	0,031	28,7	91,3
1,685	0,91	1,225	0,355	0,022	20,3	99,7
1,670	0,90	1,189	0,361	0,016	14,8	105,2
1,630	0,88	1,124	0,370	0,007	6,5	113,5
1,595	0,86	1,068	0,376	0,001	0,9	119,1

La curva se representa en la figura 213. Corta a la curva d_2 en $x_j = 81$ m., con lo que queda localizado el resalto. Los calados antes y después del resalto son, respectivamente, $d_{2j} = 6{,}23$; $d_{1j} = 3{,}82$ m.

$$d_{1j} = \frac{6{,}23}{2}\left[-1 + \sqrt{1 + 8\left(\frac{4{,}93}{6{,}23}\right)^3}\right]$$

77. El reforzador de salto de Saugey.—Un ejemplo interesante, al que son directamente aplicables las curvas de la figura 190, es el incrementador de salto sugerido por Saugey (1). El objeto que con él se pretende es aumentar el salto útil en una instalación hidroeléctrica durante los períodos de avenidas. La figura 214 representa esquemáticamente una casa de máquinas, cuyos tubos de aspira-

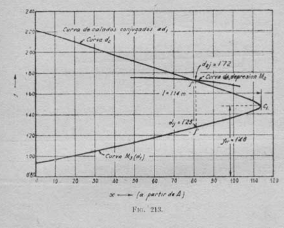


Fig. 213.

ción desaguan en un espacio situado detrás de una compuerta S. En períodos de aguas altas la altura útil se reduce a Z. Una corriente apropiada dirigida bajo la compuerta puede repeler las aguas bajas e incrementar la altura utilizable inmediatamente aguas abajo de la compuerta a Z_{art}. Este incremento de altura puede utilizarse ventajosamente. Evidentemente será ello interesante según la influencia que en la potencia del salto ejerza la pérdida de agua que se requiere para la formación del resalto.

Las características hidráulicas se estudian con facilidad mediante las curvas de la figura 190, como se ilustra con un ejemplo práctico.

(1) *Zeits. d. Ver. Deutsch. Ing.*, 1906.

EJEMPLO 38

Supongamos en la figura 215 *a* $H = 3$ m., $d_b = 2$ m.; $Z = 1$ m. Tomemos $\alpha = 0{,}62$; $\varphi^2 = 0{,}9$. Determínese el posi-

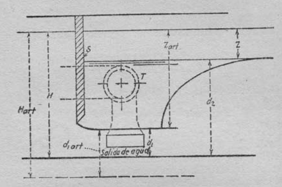


FIG. 214.—Dispositivo para aumentar el salto, ideado por Saugey.

ble incremento de altura. Para aplicar las curvas de la figura 190 debemos conocer la altura efectiva que, según la

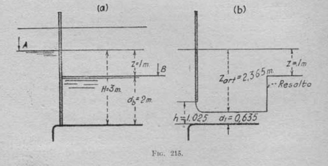


FIG. 215.

Ec. [154], depende de la apertura de la compuerta, etc. Supongamos, de primera intención, el valor de $\beta = 0{,}92$ en la

Ec. [154], lo que hace $H'=2{,}76$ m. Suponiendo el resalto próximo a la *vena contracta* tomemos como calado conjugado $d_2=d_0=2$ m.; por tanto, $d'_2=2/2{,}76=0{,}725$, valor al que corresponde (fig. 190) $d'_1=0{,}23$, de donde $d_1=0{,}23\times\times 2{,}76=0{,}635$ m. y $h=0{,}635/0{,}62=1{,}025$ la apertura de la compuerta.

La altura se ha incrementado (fig. 215 *b*) en:

$$j=2-0{,}635=1{,}365 \text{ m.}$$

$$Z_{art}=1+1{,}365=2{,}365 \text{ m.}$$

El incremento relativo de altura es:

$$Z_{art}/Z=2{,}365/1=2{,}365.$$

Como se puede apreciar en la curva $j'=d'_2-d'_1$ (figura 190), para $d'_1=0{,}23$ la estructura funciona en las proximidades del punto donde la altura reducida del resalto es máxima. Si las circunstancias fueran diferentes, podría aproximarse a las condiciones de máxima eficiencia variando H, es decir, subiendo o bajando el umbral. En otros términos: dado Z se puede siempre operar sobre el punto que se quiera de la curva actuando sobre la cota del umbral.

78. EL RESALTO COMO AMORTIGUADOR DE ENERGÍA.—En problemas de control de avenidas, proyectos de vertederos y estructuras similares se precisa dar paso a un cierto caudal de agua desde un nivel superior A a otro inferior B, existiendo entre ambos una diferencia de nivel Z. En muchos casos se precisa anular la mayor cantidad posible de la energía almacenada en el nivel superior con objeto de reducir la erosión y otros efectos destructores al pie del vertedero y zonas próximas. El resalto constituye el más eficiente *amortiguador de la energía* y se emplea frecuentemente para este objeto. En la figura 190 la pérdida reducida de energía $\varepsilon'_j=1-\varepsilon'_2$ es la distancia del borde superior de la figura a la curva ε'_2; a menor valor de d'_1 corresponden mayores pérdidas. Por ejemplo, se puede disponer del 60 por 100, y más, de la energía inicial provocando un resalto que tenga lugar con $d'_1=0{,}04$ y aun menos. Sin embargo, en tales circunstancias la apertura h de la compuerta sería

muy pequeña, y la evacuación del caudal dado podría requerir estructuras de excesiva longitud.

Las condiciones óptimas serán aquellas en las que se anule la máxima cantidad de energía por unidad de longitud de la estructura.

Para un determinado d'_1, el valor reducido de la cantidad de energía disipada por el resalto será:

$$w' = q'(1-\varepsilon'_2) \qquad [155]$$

Empleando los datos de la Tabla XLI puede calcularse la curva w'. La curva representada en la figura 190 tiene un máximo $w'=0{,}190$ para $d'_1=0{,}15$ y $d'_2=0{,}63$. La máxima disipación de energía, por unidad de ancho, asequible en estas condiciones es:

$$w_{max} = 0{,}190 \times \Delta \times H^{3/2} \times H \qquad [156]$$

Para $\Delta = 1\,000$ Kg. por m³ se tiene:

$$w_{max} = 190 \times H^{5/2} \text{ Kgm./sg.}$$

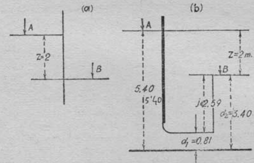


FIG. 216.—Figura correspondiente al Ejemplo 39.

EJEMPLO 39

Supongamos en la figura 216*a* $Q=30$ m³/sg., al que corresponde una potencia bruta total de

$$2 \times 30 \times 10^3 = 6 \times 10^4 \text{ Kgm./sg.}$$

Despreciando las pérdidas de desagüe se tiene, en las condiciones óptimas (fig. 216 *b*): $Z/H = 1 - d'_2 = 0{,}37$; $H = 2/0{,}37 = 5{,}40$ m.; $d_1 = 0{,}15 \times 5{,}40 = 0{,}81$ m.; $d_2 = 0{,}63 \times \times 5{,}40 = 3{,}40$ m., siendo $j = 3{,}40 - 0{,}81 = 2{,}59$ m.

La cantidad de energía disipada en un segundo por metro de longitud de compuerta es $w = 190 \times 5{,}40^{2{,}5} = 1\,276$ *Kgm*. La anchura precisa de resalto será: $b := b_1 = 6 \times \times 10^4/1\,276 = 47$ m.

CAPITULO XXI

EL RESALTO AL PIE DE UN VERTEDERO

La figura 217 se refiere al caso importante de un resalto al pie de un vertedero. Según el estado del nivel aguas abajo la lámina vertiente puede estar anegada por el nivel $B(B'b')$ o cuando el nivel B'' no es suficientemente alto puede quedar libre; en este caso se produce el resalto. Evi-

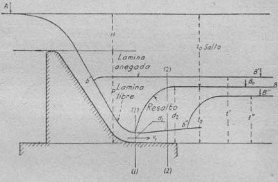


FIG. 217.—El resalto al pie de un vertedero.

dentemente, la acción erosiva en tal caso puede hacerse muy peligrosa. Las características físicas del rulo han sido investigadas experimentalmente por Rehbock (1). En este tratado nos limitaremos a la determinación de las circunstancias que motivan que la lámina quede anegada o libre.

79. EXPERIENCIAS DE BAZIN.—El problema es prácticamente idéntico al investigado por Bazin, que en su obra clásica sobre el régimen del agua en los vertederos hace la

(1) *Versuche über Abfluss*, etc., y otros trabajos.

distinción entre *lámina vertiente anegada* y *lámina libre con resalto despegado*.

Guiado únicamente por observaciones experimentales, el eminente hidráulico sugirió que la presencia de una u otra forma depende del valor del *escalón relativo* Z/P, que es el cociente de la diferencia vertical de niveles, antes y después del vertedero, a la altura de la estructura. Bazin resumió sus observaciones expresando que el valor del *escalón relativo* que delimita las dos formas posibles es un valor medio constante $(Z/P)_0 = 0{,}75$. Para valores de $Z/P > 0{,}75$ se produce el resalto despegado, independientemente de si el vertedero es o no sumergido en el sentido corriente de la palabra. Por el contrario, cuando $Z < 0{,}75P$ la lámina es anegada.

80. Teoría del fenómeno.—El problema se presta con facilidad al tratamiento teórico. Consideremos el caso de que la cresta del vertedero y el cauce después de la presa son de la misma longitud, de forma que el caudal por unidad de ancho q sobre el vertedero y al pie de la estructura es idéntico. Supongamos (fig. 217) que la altura de la lámina sobre el vertedero, corregida según la velocidad de llegada, sea H, siendo el espesor de la lámina al pie del vertedero d_1. Sea P la altura de la estructura; en la sección 1 se tendrá:

$$v_1 = \varphi\sqrt{2g(P + H - d_1)}$$

$$q = \varphi d_1 \sqrt{2g(P + H - d_1)}$$

donde φ es un coeficiente de velocidad que engloba todas las pérdidas habidas entre el depósito A y la sección 1.

Por otra parte, el gasto del vertedero con un coeficiente m es $q = m\sqrt{2g}\,H^{3/2}$. Eliminando q entre las expresiones anteriores, se tiene:

$$m^2H^3 = \varphi^2 d_1^2 (P + H - d_1) \qquad [158]$$

Designando

$$x = H/P\,; \qquad y = d_1/P \qquad [159]$$

la Ec. [158] toma la forma:

$$m^2x^2 = \varphi^2 y^2 (x - y + 1), \qquad [160]$$

que, dados P, H y m, determina el calado d_1 antes del resalto.

El régimen será *sumergido* o *libre*, según que el calado t debido al nivel B sea mayor o menor que el calado d_2 conjugado con d_1. Al aumentar t, el resalto avanza hacia la presa, hasta que para $t_0=d_2$ se alcanza la condición límite que distingue las dos formas del fenómeno.

Para determinar $d_2=t_0$ se tiene la cineticidad en la sección 1

$$\lambda_1 = 2\frac{v^2/2g}{d_1} = 2\varphi^2\frac{P+H-d_1}{d_1} = \frac{2\varphi^2}{y}(x-y+1) \quad [161]$$

y

$$d_2 = t_0 = \frac{d_1}{2}\left[-1+\sqrt{1+8\lambda_1}\right] =$$

$$= \frac{d_1}{2}\left[-1+\sqrt{1+\frac{16\varphi^2}{y}(x-y+1)}\right] \quad [162]$$

El valor de $t_0=d_2$ corresponde al de

$$Z_0 = H+P-t_0 \quad [163]$$

que después de dividir por P, y teniendo en cuenta las Ecs. [162] y [159], se tiene:

$$\left(\frac{Z}{P}\right)_0 = x+1-\frac{y}{2}\left[-1+\sqrt{1+16\varphi^2\frac{x-y+1}{y}}\right] \quad [164]$$

La Ec. [164], en unión de la [160], resuelven el problema. Dados P y H se determina primeramente d_1 por la Ec. [160], y seguidamente el valor de (Z/P_0) por la Ec. [164].

Para facilitar los datos se han calculado y dibujado las curvas apropiadas, en las figuras 218 a 220. Las figuras 218 y 219 dan los valores de $(Z/P)_0$ e $y=d_1/P$ en función de $x=H/P$ para los valores del coeficiente m: 0,42, 0,45 y 0,48. Estos coeficientes abarcan las distintas formas de vertedero desde pared delgada hasta coronación redondeada bien ejecutada. Se tiene en cuenta el caso ideal $\varphi^2=1$ y el caso medio $\varphi^2=0{,}9$. Finalmente, la figura 220 contiene una serie de curvas para vertederos del tipo pared gruesa. Los

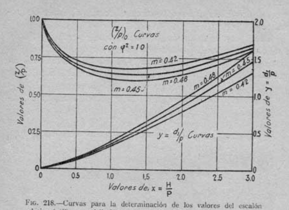


FIG. 218.—Curvas para la determinación de los valores del escalón relativo $(z/P)_0$, que delimitan la formación de resalto *libre* o *anegado*.

coeficientes de rozamiento correspondientes a los coeficientes de gasto se toman algo por exceso sobre los determinados en el artículo 17.

Comparación con las experiencias de Bazin.—Es interesante comparar los resultados teóricos con las observaciones

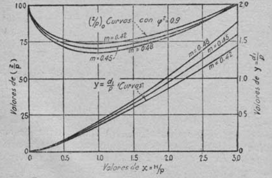


FIG. 219.—Lo mismo que la figura 218, pero con $\varphi^2 = 0{,}9$.

de Bazin. Este hizo experiencias con vertederos en pared delgada de $P=1{,}24$ y $0{,}75$ m., respectivamente. El intervalo de alturas relativas fué de 0,37 a 1,74. El coeficiente de gasto en este caso tenía un valor medio próximo a 0,42. Con $\varphi^2=0{,}9$ (fig. 219) la curva teórica da, para $m=0{,}42$, valores de $(Z/P)_0$ comprendidos entre 0,73 y 0,78. La comparación

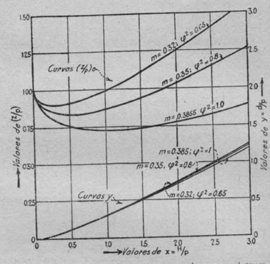


FIG. 220.—Lo mismo que la figura 218, para vertederos en pared gruesa.

con el valor medio de 0,75 dado por Bazin es muy satisfactoria. Hay que advertir, además, que la curva $(Z/P)_0$ en el intervalo de valores de H/P tomados por Bazin es muy aplastada, lo cual explica que éste estuviera propicio a aceptar un valor constante de $(Z/P)_0$ como demarcación del tipo de fenómeno. De la forma de las curvas se aprecia, no obstante, que para valores pequeños de H/P resultan presas muy altas. En el caso contrario, de ser relativamente grande H/P (es decir, para presas muy bajas), el valor crítico de $(Z/P)_0$ es considerablemente mayor.

Ejemplo 40

Un curso de agua está interceptado (fig. 221) por una presa de 10 m. de altura, con coronación redondeada, a la que corresponde un coeficiente de gasto $m=0,45$. La lámina vertiente es $H=2,50$ m., el calado aguas abajo, $t=4,00$ metros. Tómese $\varphi^2=0,9$. Determinar el tipo de régimen al pie de la presa.

Se tiene $x=H/P=2,50/10=0,25$. El escalón relativo $Z/P=8,50/10=0,85$. De la curva 219, para $m=0,45$ y $H/P=0,25$, el valor límite de $(Z/P)_0$ que repele las aguas bajas será $(Z/P)_0=0,8$.

Como $Z/P=0,85$ es en nuestro caso mayor que $(Z/P)_0=0,8$, el régimen será libre, con resalto despegado.

Para que la lámina quede anegada deberá reducirse el valor de Z/P. Hay dos procedimientos para conseguirlo:

1.° *Colchón de agua* (fig. 221, *b*).—Se excava aguas abajo la presa una profundidad ΔP, incrementándose la altura P a $P'=P+\Delta P$ y reduciéndose proporcionalmente el escalón relativo a $\frac{Z}{P+\Delta P}$.

Para $Z=8,50$, para que $Z/P'=0,8$, deberá ser $P'=8,50/0,8=10,65$. El colchón debe tener, por lo menos, 0,65 m. de profundidad. Para operar con un cierto margen de seguridad, haremos $\Delta P=1,50$ m. y $P'=11,50$. Se tendrá ahora: $H/P'=2,5/11,50=0,22$; $Z/P'=8,50/11,50=0,74$; y de la curva $(Z/P)_0$ (fig. 219), para $x=0,22$, $(Z/P)_0=0,82$.

2.° *Un obstáculo* (fig. 221, *c*).—Puede disponerse una contrapresa adicional a distancia conveniente para la formación del resalto y de altura que se determina fácilmente. El escalón es ahora $Z'=Z-\Delta Z$, y en proporción disminuye el valor de Z'/P.

En nuestro caso, al hacer Z'/P igual a $(Z/P)_0=0,8$ se reduce el escalón a $Z'=0,8\times 10=8$ m. Para operar con un cierto margen haremos $\Delta Z'=1$ m. y $Z'=7,50$; se tendrá entonces:

$$Z'/P=7,50/10=0,75.$$

Debe pararse atención en el hecho de que en ciertas circunstancias la lámina bajo la segunda presa puede no quedar anegada.

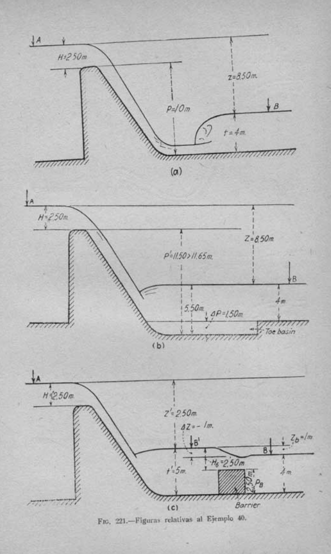


FIG. 221.—Figuras relativas al Ejemplo 40.

En nuestro caso, suponiendo que la contrapresa es de 2,50 m. de altura y que la altura requerida para el paso del

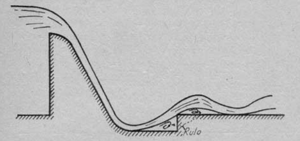


FIG. 222.—Régimen en el caso de que el cuenco no es suficientemente profundo.

agua sobre ella es también $H_L = 2{,}50$ m., se tiene, empleando la misma curva $(Z/P)_0$:

$$H_B/P_B = 2{,}50/2{,}50 = 1; \quad Z_B/P_B = 1/2{,}50 = 0{,}40,$$

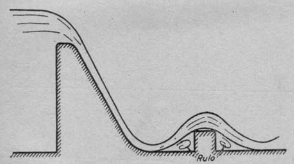


FIG. 223.—Régimen en el caso de que el obstáculo no es suficientemente elevado.

mientras que por la curva $(Z/P)_0$ el margen para que se produzca lámina anegada es amplio.

También conviene prestar atención al caso que se presenta (fig. 221, *c*) cuando el obstáculo no es suficiente-

mente alto, o (fig. 221, *b*) cuando el cuenco no es suficientemente profundo. Las figuras 222 y 223 dan una idea de la forma del movimiento del líquido en tales casos, en los que por la formación de remolinos, movimiento ondular del agua, etc., resulta incrementado el efecto erosivo.

Otra circunstancia que debe recordarse es que las fórmulas obtenidas anteriormente solamente permiten determinar los elementos verticales del esquema funcional.

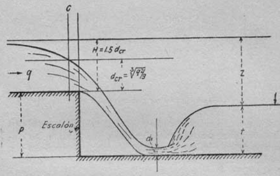


FIG. 224.—Resalto bajo un escalón.

Nada positivo puede decirse por ahora sobre la longitud requerida por el colchón de agua, mínima distancia de la contrapresa al pie del vertedero, etc.

Como se ha hecho notar en el Capítulo XVIII, estos problemas permanecen reservados a futuras investigaciones.

81. EL RESALTO BAJO UN ESCALÓN.—La figura 224 se refiere a un escalón en un canal, medio al que se recurre a menudo, en particular en riegos, para perder cota. Aquí, nuevamente, según la posición relativa del nivel *B*, la vena líquida puede bien quedar libre, bien anegada.

Generalmente la pendiente del canal es suave, de forma que en las proximidades al borde del escalón se establecerá el calado crítico. Supongamos la sección rectangular. La energía específica en tal caso será $\varepsilon_{cr}=1{,}5\ d_{cr}$. El caudal q

que vierte sobre el escalón puede asimilarse al gasto de un vertedero en pared gruesa en el caso ideal $\varphi=1$, con un coeficiente de gasto teórico $m=0,385$ y $H=\varepsilon_{cr}$. En otros términos, puede hacerse:

$$q=0,385 \,.\, \sqrt{2g}\, H^{3/2} \qquad [165]$$

con la altura

$$H=1,5\, d_{cr}=1,5\, \sqrt{q^2/g}. \qquad [166]$$

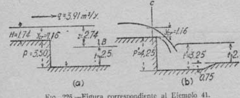


FIG. 225.—Figura correspondiente al Ejemplo 41.

Esta analogía nos permite aplicar el método desarrollado anteriormente, sin más modificaciones. En efecto: los elementos del movimiento al pie del escalón se determinan por las Ecs. [158] y [164], teniendo en cuenta que $m=0,385$ y $\varphi^2=1$. Con el caudal $Q=qb$ dado, H puede tomarse $1,5\sqrt{q^2/g}$. En la figura 220 se dan las respectivas curvas $(Z/P)_0$ y d_1/P.

EJEMPLO 41

Supongamos (fig. 226, *a*) que el escalón sea de forma rectangular, con $P=3,50$ m., que el caudal por unidad de ancho es $q=3,91$ m³/sg. y que el calado aguas abajo es $t=2,50$ m.

$$y_{cr}=\sqrt[3]{3,91^2/9,81}=1,16 \text{ m.}$$

por lo que se tendrá: $H=1,5\, y_{cr}=1,74$ m., de donde:

$$Z=P+H-t=2,74 \text{ m.}$$

Se tiene ahora, empleando la curva $(Z/P)_0$ de la figura 220, correspondiente a $m=0,385$ y $\varphi^2=1$:

$$H/P=1,74/3,5=\simeq 0,5\,; \quad Z/P=2,74/3,50=0,79.$$

Por otra parte, según la curva, el escalón límite es $(Z/P)_0 = 0{,}75$.

Como $Z/P = 0{,}79 > (Z/P)_0$ la lámina queda libre, con formación de resalto despegado.

La vena puede quedar anegada, disponiendo un colchón de 0,75 m. de profundidad. En efecto: se tiene entonces:

$$P' = 3{,}5 + 0{,}75 = 4{,}25 \text{ m.}; \quad H/P' = 1{,}74/4{,}25 \simeq 0{,}41;$$
$$(Z/P)_0 = 0{,}725,$$

en tanto que en la estructura se reduce ahora a $2{,}74/4{,}25 = 0{,}65$.

En la figura 225, *b*, se hace la representación esquemática.

APENDICES

APENDICE I

NOTAS HISTORICAS Y BIBLIOGRAFICAS

La iniciación de la teoría del régimen variado va asociada al nombre de J. M. Bélanger. Efectivamente, su *Essai sur la solution numérique de quelques problèmes relatives au mouvement permanent des eaux courantes* (París, 1828), contiene la ecuación diferencial general del régimen *paralelo* no uniforme, expone métodos de integración aproximada, discute la naturaleza del resalto, y, en general, abarca toda la materia del régimen variado de una manera notablemente completa y comprensiva.

El siguiente paso importante lo da Coriolis con su publicación «Sur l'établissement de la formule qui donne la figure du remous» (*Ann. Ponts et Chaussées,* 1836). Mientras Bélanger y sus discípulos dedujeron la ecuación del régimen variado de la ecuación general del movimiento, de Newton, Coriolis hizo aplicación del principio de conservación de la energía, y por tanto, fué el primero en sugerir el razonamiento que se sigue en los textos de Hidráulica para establecer la llamada ecuación de Bernoulli.

Una relación interesante de estos primeros pasos fué dada por St. Vénant en un manuscrito de fecha 1876, publicado posteriormente en los *Ann. Ponts et Chaussées* (1886).

Con relación a la integración de la ecuación, el caso de un canal rectangular de gran anchura fué tratado por Dupuit en 1848: *Études théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux* (2.ª ed., París, 1863). De forma algo distinta fué tratado el mismo problema por Rühlmann: *Hydromechanik* (2.ª ed., Hannover, 1880). Ambos autores ignoraban el efecto del cambio de energía cinética. El caso fué presentado en forma completa por Bresse: *Hydrauli-*

que (París, 1860), y subsiguientemente por Grashof: *Theoretische Maschinenlehre* (vol. I). El caso de un canal parabólico fué tratado por Tolkmitt: *Grundlagen der Wasserbaukunst* (Berlín, 1898). Para soluciones más recientes de Schaffernack, Ehrenberger y Kozény, véase Forcheimer: *Hydraulik* (2.ª ed., Leipzig, 1930). Otros métodos de aproximación: Baticle: *Génie Civil* (1921); Husted: *Eng. News-Record* (1924).

Una descripción clara y clasificación de las diferentes curvas de lámina libre fué dada por M. Boudin: «Sur l'axe hydraulique etc.» *Ann. des Travaux Publiques de la Belgique* (vol. 20, 1861-1862). La clasificación de los cursos de agua según la pendiente del fondo fué sugerida por St. Vénant (*Ann. Mines*, 1851). La distinción entre *estados de régimen* fué hecha con claridad por Boussinesq: *Essai sur la théorie des eaux courantes* (París, 1877). Este *opus magnum* constituye una piedra angular en el desarrollo de la mecánica de los flúidos, permaneciendo como tesoro de inspiradas sugerencias. En parte hizo uso del material experimental acumulado por Darcy y Bazin: *Recherches hydrauliques* (París, 1865). Entre otras aportaciones, debemos a Boussinesq el término *movimiento turbulento*, y posiblemente el primer *intento* de una explicación «estadística» del mecanismo del régimen turbulento. Otras obras de Boussinesq son: *Théorie de l'écoulement tourbillonant et tumultueux* (París, 1879); *L'écoulement en déversoir* (Mem. de l'Acad., 1907).

Excelentes sumarios de la obra de Boussinesq se encuentran en:

FLAMANT: *Hydraulique* (última edición, París, 1923).
FORCHEIMER: *Hydraulik* (2.ª ed., Leipzig, 1930).
MASONI'S: *Hidraulica* (2.ª ed., 1900; en Italia).

Con referencia a los manuales en inglés, el régimen variado se discute con alguna extensión en los conocidos textos de hidráulica de Merriman, King y Gibson. Esta materia se trata con detalle en los *Technical Reports Miami Conservancy District*.

Las publicaciones más importantes son:

KENNISON: «The Hydraulic Jump in Open Chamel Flow» (*Trans. A.S.C.E.*, 1916).
JOHNSON: «Surges in an Open Canal» (*Trans. A.S.C.E.*, 1917).
HINDS: *Eng News-Record* (vol. 85, págs. 1034-1040, 1920).

Para una relación de los estudios experimentales sobre los aspectos físicos del régimen, llevados a cabo por el Profesor Rehbock (Carlsruhe) y sus discípulos, véase:

REHBOCK: «Stauwerke» (vol. II, *Handbuch der Ingenieur-Wissenschaften*, III, Leipzig, 1912; «Betrachtungen über Abfluss, Stau-und Walzenbildung» (Berlín, 1917); artículos sobre práctica hidráulica de laboratorio (*A.S.M.E.*, 1929).
BÖSSH «Mitt. für Forschungsarbeiten» (*V.D.I.*, número 284).

También numerosos artículos en el *Bauingenieur* y otras publicaciones, una detallada relación de los cuales se da en *Hydraulisches Rechnen* por Weyrauch-Strobel (6.ª ed., Stutgart, 1930).

La contribución del profesor Kock (Darmstadt) se recopila en *Bewegung des Wassers*, por Koch-Carstanjen (Berlín, 1926). Otras obras extensas contemporáneas en alemán son:

FORCHEIMER: *Wasserschwall und Wassersunk* (Leipzig, 1924).
SCHOKLITSH: *Der Wasserbau* (Berlín, 1930).
KOZÉNY: *Wasserführung der Flüsse* (Leipzig-Viena, 1920).

Una lista detallada de pequeñas contribuciones se halla en la obra citada de Weyrauch-Strobel (pág. 355).

Para una relación de los desarrollos recientes de otros aspectos teóricos de la hidrodinámica aplicada, véase:

PRANDTL-TIETJENS: *Hidro- und Aeromechanik* (Berlín, 1929-1931).
KAUFMAN: *Hidromechanik* (Berlín, 1931).
Handbuch der Experimentalphysik (vol. 4).

Handbuch der Physik (vol. 7).
Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik (vol. 5).
«Hydraulische Probleme» (*V.D.I.*, 1926).
KARMAN y LEVI-CIVITA: *Vorträge aus dem Gebiete der Hydro-und Aerodynamik* (Berlín, 1924).

APENDICE II

METODOS DE CALCULO DE LAS TABLAS DE LA FUNCION DEL REGIMEN VARIADO

Los valores numéricos de la función del régimen variado

$$B(\eta) = -\int_0^\eta \frac{d\eta}{\eta^n - 1} = \int_0^\eta \frac{d\eta}{1-\eta^n}$$

se han calculado por uno u otro de los siguientes métodos, según los valores del argumento η.

MÉTODO 1.° Para valores de $\eta < 1$ se puede emplear el desarrollo en serie:

$$\frac{1}{1-\eta^n} = 1 + \eta^n + \eta^{2n} + \dots + \eta^{(p-1)n} + r_p \qquad [a]$$

donde n es el exponente hidráulico, p el número de términos tomados en la serie, y

$$r_p = \eta^{pn} + \eta^{(p+1)n} + \dots$$

Integrando se tiene:

$$\int \frac{d\eta}{1-\eta^n} = \eta + \frac{1}{n+1}\eta^{n+1} + \frac{1}{2n+1}\eta^{2n+1} + \dots +$$

$$+ \frac{1}{(p-1)n+1}\eta^{(p-1)n+1} + R_p \qquad [b]$$

donde

$$R_p = \int r_p d\eta = \frac{1}{pn+1}\eta^{pn+1} + \dots = \frac{1}{pn+1}\eta^{pn+1}$$

$$\left(1 + \frac{pn+1}{pn+n+1}\theta^n + \dots\right)$$

Evidentemente,

$$R_p < \frac{\eta^{pn+1}}{pn+1}(1+\eta^n+\eta^{2n}+\ldots) = \frac{\eta^{pn+1}}{pn+1}\cdot\frac{1}{1-\eta^n} \qquad [c]$$

La ecuación [c] nos permite determinar el número p de términos de la serie que es necesario tomar para conseguir una precisión determinada. El valor de $B(\eta)$ se calcula mediante la Ec. [b]. Para valores relativamente pequeños de η la serie [a] es de convergencia rápida, siendo práctico el método para valores de $\eta \leq 0{,}70$. Para mayores valores de η, y en particular en las proximidades al valor unidad, el número p de términos precisos se hace impracticablemente grande.

MÉTODO 2.° Para valores de $\eta > 1$ se obtiene una serie convergente haciendo $\eta = 1/z^2$ y $n = k/2$, de forma que $\eta^n = 1/z^k$, y

$$d\eta = -2\,dz/z^3 \qquad [a]$$

Se tiene:

$$\frac{1}{2}\int\frac{d\eta}{1-\eta^n} = \int\frac{z^{k-3}}{1-z^k}dz = \frac{z^{k-2}}{1-z^k} + \frac{z^{2k-2}}{2k-2} + \cdots +$$

$$+ \frac{z^{(p-1)k-2}}{(p-1)k-2} + R'_p \qquad [b]$$

donde

$$R'_p < \frac{z^{pk-2}}{pk-2}\cdot\frac{1}{1-z^k} \qquad [c]$$

Sustituyendo $z^k = 1/\eta^n$ en las Ecs. [b] y [c], se tiene:

$$2\int\frac{z^{k-3}}{1-z^k}dz = \int\frac{d\eta}{1-\eta^n} = \frac{1}{(n-1)\eta^{n-1}} +$$

$$+ \frac{1}{(2n-1)\eta^{2n-1}} + \cdots + R_p \qquad [d]$$

donde

$$R_p < \frac{1}{(pn-1)\eta^{pn-1}}\cdot\frac{\eta^n}{\eta^n-1} \qquad [e]$$

La serie [d] es convergente, dependiendo la rapidez de la convergencia del valor de η. Resulta de aplicación práctica para valores de $n \geqslant 1{,}50$.

MÉTODO 3.° Para el intervalo $0{,}7 < \eta < 1{,}50$ resulta más práctica la conocida fórmula de Poncelet, de integración aproximada:

$$\int_a^b y dx = \frac{b-a}{2\,m}(2\,q+s) \qquad [a]$$

donde $2\,m$ es el número de intervalos iguales en que se supone dividido el total $a-b$; y_1, y_2, y_3, ..., y_{2m} e y_{2m+1} son los valores respectivos de la función $y = f(x)$ correspondientes, a los intervalos anteriores, mientras

$$\left.\begin{aligned} q &= y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m} \\ s &= \tfrac{1}{4}(y_1 + y_{2m+1} - y_2 - y_{2m}) \end{aligned}\right\} \qquad [b]$$

El error en este caso es

$$\varepsilon < \frac{b-a}{2\,m} \cdot s \qquad [c]$$

El método de Poncelet determina el valor

$$-\Delta B(\eta) = \int_a^b \frac{d\,\eta}{1-\eta^n}$$

el cual, sumado a

$$-B(a) = \int_0^a \frac{d\,\eta}{1-\eta^n}$$

determina

$$-B(b) = \int_0^b \frac{d\,\eta}{1-\eta^n}$$

Llegando en la tabla a un cierto valor de $B(a)$ previamente determinado por algún otro método, la fórmula de Poncelet permite obtener los valores consecutivos de la tabla. Para cada intervalo $a-b$, la Ec. [c] determina el número de intervalos parciales $2\,m$ en que es preciso subdividirlo para conseguir la precisión requerida.

MÉTODO 4.° Para los valores de $\eta \gtrless 1$, pero próximos a

la unidad, el número de intervalos que requiere la fórmula de Poncelet se hace muy grande. En este caso es ventajosa la serie que se obtiene haciendo

$$1 + \eta^n = \pm z \qquad [a]$$

donde el signo + corresponde a valores de $\eta < 1$, y el signo − a $\eta > 1$, obteniéndose

$$\int \frac{d\eta}{1-\eta^n} = \text{const} + \frac{\log z}{n} \pm \frac{n-1}{n^2} z + \frac{(n-1)(2n-1)}{2n^3 \times 2!} z^2 \pm$$
$$\pm \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{3n^4 \times 3!} z^3 + \ldots + R_p$$

La rapidez de convergencia de esta serie aumenta a medida que decrece z, es decir, al aproximarse η a la unidad. El número p de términos requerido para conseguir la precisión deseada viene determinado por

$$R_p < \frac{z^p}{n} \cdot \frac{1}{1-z}$$

Las tablas se han calculado con error $\varepsilon \leq 0{,}0005$

TABLAS DE LA FUNCION DEL REGIMEN VARIADO

Tabla I. $B(\eta) = -\int_0^{\eta} \frac{d\eta}{\eta^n - 1}$ para $\eta < 1$

Tabla II. $\Phi(\eta) = \eta - B(\eta)$ para $\eta > 1$

Tabla I a.—La función del régimen variado $B(\eta)$ para $\eta > 1$

Valores de la función para valores del exponente:

η	n = 2,8	n = 3,0	n = 3,2	n = 3,4	n = 3,6	n = 3,8	n = 4,0	n = 4,2	n = 4,6	n = 5,0	n = 5,4
1,001	2,399	2,184	2,008	1,855	1,725	1,610	1,508	1,417	1,264	1,138	1,033
1,005	1,818	1,649	1,506	1,384	1,279	1,188	1,107	1,036	0,915	0,817	0,737
1,010	1,572	1,419	1,291	1,182	1,089	1,007	0,936	0,873	0,766	0,681	0,610
1,015	1,428	1,286	1,166	1,065	0,978	0,902	0,836	0,778	0,680	0,602	0,537
1,02	1,327	1,191	1,078	0,982	0,900	0,828	0,766	0,711	0,620	0,546	0,486
1,03	1,186	1,060	0,955	0,866	0,790	0,725	0,668	0,618	0,535	0,469	0,415
1,04	1,086	0,967	0,868	0,785	0,714	0,653	0,600	0,554	0,477	0,415	0,365
1,05	1,010	0,896	0,802	0,723	0,656	0,598	0,548	0,504	0,432	0,374	0,328
1,06	0,948	0,838	0,748	0,672	0,608	0,553	0,506	0,464	0,396	0,342	0,298
1,07	0,896	0,790	0,703	0,630	0,569	0,516	0,471	0,431	0,366	0,315	0,273
1,08	0,851	0,749	0,665	0,595	0,535	0,485	0,441	0,403	0,341	0,292	0,252
1,09	0,812	0,713	0,631	0,563	0,506	0,457	0,415	0,379	0,319	0,272	0,234
1,10	0,778	0,681	0,601	0,536	0,480	0,433	0,392	0,357	0,299	0,254	0,218
1,11	0,746	0,652	0,575	0,511	0,457	0,411	0,372	0,338	0,282	0,239	0,204
1,12	0,718	0,626	0,551	0,488	0,436	0,392	0,354	0,321	0,267	0,225	0,192
1,13	0,692	0,602	0,529	0,468	0,417	0,374	0,337	0,305	0,253	0,212	0,181
1,14	0,669	0,581	0,509	0,450	0,400	0,358	0,322	0,291	0,240	0,201	0,170
1,15	0,647	0,551	0,490	0,432	0,384	0,343	0,308	0,278	0,229	0,191	0,161
1,16	0,627	0,542	0,473	0,417	0,369	0,329	0,295	0,266	0,218	0,181	0,153
1,17	0,608	0,525	0,458	0,402	0,356	0,317	0,283	0,255	0,208	0,173	0,145
1,18	0,591	0,509	0,443	0,388	0,343	0,305	0,272	0,244	0,199	0,165	0,138
1,19	0,574	0,494	0,429	0,375	0,331	0,294	0,262	0,235	0,191	0,157	0,131
1,20	0,559	0,480	0,416	0,363	0,320	0,283	0,252	0,226	0,183	0,150	0,125
1,22	0,531	0,454	0,392	0,341	0,299	0,264	0,235	0,209	0,168	0,138	0,114
1,24	0,505	0,431	0,371	0,322	0,281	0,248	0,219	0,195	0,156	0,127	0,104
1,26	0,482	0,410	0,351	0,304	0,265	0,233	0,205	0,182	0,145	0,117	0,095
1,28	0,461	0,391	0,334	0,288	0,250	0,219	0,193	0,170	0,135	0,108	0,088
1,30	0,442	0,373	0,318	0,274	0,237	0,207	0,181	0,160	0,126	0,100	0,081
1,32	0,424	0,357	0,304	0,260	0,225	0,196	0,171	0,150	0,118	0,093	0,075
1,34	0,408	0,342	0,290	0,248	0,214	0,185	0,162	0,142	0,110	0,087	0,069
1,36	0,393	0,329	0,278	0,237	0,204	0,176	0,153	0,134	0,103	0,081	0,064
1,38	0,378	0,316	0,266	0,226	0,194	0,167	7,145	0,127	0,097	0,076	0,060
1,40	0,365	0,304	0,256	0,217	0,185	0,159	0,138	0,120	0,092	0,071	0,056
1,42	0,353	0,293	0,246	0,208	0,177	0,152	0,131	0,114	0,087	0,067	0,052
1,44	0,341	0,282	0,236	0,199	0,169	0,145	0,125	0,108	0,082	0,063	0,049
1,46	0,330	0,273	0,227	0,191	0,162	0,139	0,119	0,103	0,077	0,059	0,046
1,48	0,320	0,263	0,219	0,184	0,156	0,133	0,113	0,098	0,073	0,056	0,043
1,50	0,310	0,255	0,211	0,177	0,149	0,127	0,108	0,093	0,069	0,053	0,040
1.55	0,288	0,235	0,194	0,161	0,135	0,114	0,097	0,083	0,061	0,046	0,035
1,60	0,269	0,218	0,179	0,148	0,123	0,103	0,087	0,074	0,054	0,040	0,030
1,65	0,251	0,203	0,165	0,136	0,113	0,094	0,079	0,067	0,048	0,035	0,026
1,70	0,236	0,189	0,153	0,125	0,103	0,086	0,072	0,060	0,043	0,031	0,023
1,75	0,212	0,177	0,143	0,116	0,095	0,079	0,065	0,054	0,038	0,027	0,020
1,80	0,209	0,166	0,133	0,108	0,088	0,072	0,060	0,049	0,034	0,024	0,017
1,85	0,198	0,156	0,125	0,100	0,082	0,067	0,055	0,045	0,031	0,022	0,015

TABLA I *a*.—LA FUNCIÓN DEL RÉGIMEN VARIADO $B(\eta)$ PARA $\eta > 1$

(*Continuación*)

η	n = 2,8	n = 3,0	n = 3,2	n = 3,4	n = 3,6	n = 3,8	n = 4,0	n = 4,2	n = 4.6	n = 5,0	n = 5,0
1,85	0,198	0,156	0,125	0,100	0,082	0,067	0,055	0,045	0,031	0,022	0,015
1,90	0,188	0,147	0,117	0,094	0,076	0,062	0,050	0,041	0.028	0.020	0,014
1,95	0,178	0,139	0.110	0,088	0,070	0,057	0.046	0,038	0,026	0,018	0,012
2,00	0,169	0,132	0,104	0,082	0,066	0,053	0,043	0,035	0,023	0,016	0,011
2,1	0,154	0,119	0,092	0,073	0,058	0,046	0,037	0,030	0,019	0.013	0,009
2,2	0,141	0,107	0,083	0,065	0,051	0,040	0.032	0,025	0,016	0,011	0,007
2,3	0,129	0,098	0,075	0,058	0.045	0,035	0,028	0,022	0,014	0,009	0,006
2,4	0,119	0,089	0,068	0.052	0,040	0,031	0,024	0,019	0,012	0,008	0,005
2,5	0,110	0,082	0,062	0,047	0,036	0,028	0,022	0,017	0,010	0.006	0,004
2,6	0,102	0,076	0,057	0,043	0,033	0,025	0,019	0,015	0,009	0,005	0,003
2.7	0,095	0,070	0,052	0,039	0,029	0,022	0.017	0,013	0,000	0,005	0,003
2,8	0,089	0,065	0,048	0,036	0,027	0,020	0,015	0,012	0.007	0,004	0,002
2,9	0,083	0,060	0,044	0,033	0,024	0,018	0.014	0,010	0,006	0,004	0,002
3,0	0,078	0,056	0,041	0,030	0,022	0,017	0,012	0,009	0,005	0,003	0,002
3,5	0,059	0,041	0,029	0,021	0,015	0,011	0,008	0,006	0.003	0,002	0,001
4,0	0,046	0,031	0,022	0,015	0,010	0,007	0,005	0,004	0,002	0,001	0,000
4,5	0,037	0,025	0,017	0,011	0,008	0,005	0,004	0,003	0,001	0,001	0,000
5,0	0,031	0,020	0,013	0,009	0.006	0,004	0,003	0,002	0,001	0,000	0,000
6,0	0,022	0,014	0,009	0,006	0,004	0,002	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000
7,0	0,017	0,010	0,006	0,004	0,002	0,002	0,001	0,001			
8,0	0,013	0,008	0.005	0,003	0,002	0,001	0,001	0,000			
9,0	0,011	0,006	0,004	0,002	0,001	0,001	0,000	0,000			
10,0	0,009	0,005	0,003	0,002	0,001	0,001	0,000	0,000			
20,0	0,003	0,002	0,001	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000			

TABLA I b.—LA FUNCIÓN DEL RÉGIMEN VARIADO $B(\eta)$ PARA $\eta < 1$

Valores de la función para valores del exponente:

η	n = 2,8	n = 3,0	n = 3,2	n = 3,4	n = 3,6	n = 3,8	n = 4,0	n = 4,2	n = 4,6	n = 5,0	n = 5,4
0,00	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0.000	0,000	0,000	0.000	0,000	0.000
0,02	0,020	0,020	0,020	0,020	0.020	0,020	0,020	0,020	0.020	0,020	0,020
0,04	0.040	0,040	0,040	0,040	0,040	0,040	0,040	0,040	0,040	0,040	0.040
0,06	0,060	0,060	0,060	0,060	0,060	0,060	0,060	0,060	0,060	0,060	0,060
0,08	0,080	0,080	0,080	0,080	0,080	0,080	0,080	0,080	0,080	0,080	0,050
0,10	0.100	0,100	0,100	0,100	0,100	0.100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100
0,12	0,120	0.120	0,120	1,120	0,120	0,120	0,120	0,120	0,120	0,120	0,120
0,14	0,140	0,040	0,140	0,140	0,140	0.140	0,140	0,140	0,140	0,140	0,140
0,16	0,160	0,160	6,160	0,160	0,160	0,160	0,160	0,160	0,160	0,160	0,160
0,18	0,180	0,180	0,180	0,180	0,180	0,180	0,180	0,180	0,180	0,180	0.180
0.20	0,201	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0.200	0,200
0,22	0,221	0,221	0,220	0,220	0,220	0,220	0,220	0,220	0,220	0,220	0.220
0,24	0,241	0,241	0,241	0,240	0,240	0,240	0,240	0,240	0.240	0.240	0,240
0,26	0,262	0.261	0,261	0,261	0,260	0,260	0,260	0,260	0,260	0,260	0,260
0,28	0,282	0,282	0.281	0,281	0,281	0,280	0,230	0,280	0,280	0,280	0,280
0,30	0,303	0,302	0,302	0,301	0,301	0,301	0,300	0,300	0,300	0,300	0,330
0,22	0,324	0,323	0,322	0,822	0,321	0,321	0,321	0,321	0,320	0,320	0,320
0,34	0,344	0,343	0,343	0,342	0,342	0,541	0,341	0,341	0,340	0,340	0,340
0,36	0,366	0,364	0,363	0,363	0,362	0,362	0,361	0,361	0,361	0,360	0,360
0,38	3,387	0,385	0,384	0,383	0,383	0,382	0,382	0,381	0,381	0,381	0,380
0,40	0,408	0,407	0,405	0,404	0,403	0,403	0,402	0,402	0,401	0,401	0,400
0,42	0,430	0,428	0,426	5,425	0,424	0,423	0,423	0,422	0,421	0,421	0,421
0,44	0,452	0,450	0,448	0,446	0,445	0,444	0,443	0.443	0,442	0,441	0,441
0,46	0,475	0'472	0,470	0,468	0,466	0,465	0,464	0,463	0,462	0,462	0,461
0,48	0,497	0,494	0.492	0.489	0,488	0,486	0,485	0,484	0.483	0.482	0,481
0,50	0,521	0.517	0,514	0,511	0,509	0,508	0,506	0,505	0,504	0,503	0,502
0,52	0,524	0,540	0,536	0,534	0,531	0,529	0,528	0,527	0,525	0,523	0,522
0,54	0,568	0,563	0,559	0,556	0,554	0,551	0,550	0,548	0,546	0,544	0,543
0,56	0,593	0,587	0,583	0,579	0,576	0,574	0,572	0,570	0,567	0,565	0,564
0,58	0,618	0,612	0,607	0,603	0,599	0,596	0,594	0.592	0,589	0,587	0,585
0,60	0,644	0,637	0,631	0,627	0,523	0,620	0,617	0,614	0,611	0,608	0,606
0,61	0,657	0,650	0,644	0,639	0,535	0,631	0,628	0,626	0,622	8.619	0,617
0,62	0,671	0,663	0,657	0,651	0,647	0,643	0,640	0,637	0,633	0,630	0,628
0,63	0,684	0,676	0,669	0,664	0,659	0,655	0,652	0,649	0,644	0,641	0,638
0,64	0,698	0,690	0,683	0,677	0,672	0,667	0,664	0,661	0,656	0,652	0,649

TABLA I b.—LA FUNCIÓN DEL RÉGIMEN VARIADO $B(\eta)$ PARA $\eta < 1$

(Continuación)

η	n = 2,8	n = 3,0	n = 3,2	n = 3,4	n = 3,6	n = 3,8	n = 4,0	n = 4,2	n = 4,6	n = 9,0	n = 5,4
0,64	0,698	0,690	0,683	0,677	0,672	0,667	0,664	0,661	0,656	0.652	0,649
0,65	0,712	0,703	0,696	0,689	0,684	0,680	0,676	0,673	0.667	0,663	0,660
0,66	0,727	0,717	0,709	0,703	0,697	0,692	0,688	0,685	0,679	0,675	0,672
0,67	0,742	0,731	0.723	0,716	0,710	0,705	0,701	0,697	0,691	0,686	0,683
0,68	0,757	0,746	0,737	0,729	0,723	0,718	0.713	0,709	0,703	0,698	0,694
0,69	0,772	0,761	0,751	0,743	0,737	0,731	0,726	0,722	0,715	0,710	0,706
0,70	0,787	0,776	0,766	0,757	0,750	0,744	0,739	0,735	0,727	0,722	0,71
0,71	0,804	0,791	0,781	0,772	0,764	0,758	0,752	0,748	0,740	0,734	0.729
0,72	0,820	0,807	0,796	0,786	0,779	0,772	0,766	0,761	0.752	0,746	0,741
0,73	0,837	0.823	0,811	0,802	0,793	0,786	0,780	0,774	0,765	0,759	0.753
0,74	0,854	0,840	0,827	0,817	0,808	0,800	0.794	0,788	0,779	0,771	0,766
0,75	0,872	0,857	0,844	0,833	0,823	0,815	0,808	0,802	0,792	0.784	0,778
0,76	0,890	0.874	0,861	0,846	0,839	0,830	0,823	0,817	0,806	0,798	0.791
0,77	0,909	0,892	0,878	0,866	0,855	0,846	0,838	0,831	0,820	0,811	0,804
0,78	0,929	0,911	0,896	0,883	0,872	0,862	0,854	0.847	0,834	0,825	0,817
0,79	0,949	0,930	0,914	0,901	0,889	0,879	0,870	0,862	0,849	0,839	0.831
0,80	0,980	0,950	0,934	0,919	0,907	0,896	0,887	0,878	0,865	0,854	0.845
0,81	0,992	0,971	0,954	0,938	0.925	0,914	0,904	0,895	0,881	0,869	0,860
0,82	1,015	0,993	0,974	0,958	0,945	0,932	0,922	0,913	0,897	0,885	0,875
0,83	1,039	1,016	0,996	0,979	0,965	0,952	0,940	0,931	0,914	0,901	0.890
0,84	1,064	1,040	1.019	1,001	0,985	0,972	0,960	0,949	0,932	0,918	0,906
0,85	1,091	1,065	1.043	1,024	1,007	0,993	0,980	0,969	0,950	0,935	0,923
0.86	1,119	1,092	1,068	1,048	1,031	1.015	1,002	0,990	0,970	0,954	0,940
0,87	1,149	1,120	1,095	1,074	1,055	1,039	1,025	1,012	0,990	0,973	0.959
0,88	1,181	1,151	1,124	1,101	1:081	1.064	1,049	1,035	1,012	0,994	0,978
0.89	1,216	1,183	1.155	1.131	1,110	1,091	1.075	1,060	1.035	1,015	0,999
0,90	1,253	1,218	1,189	1,163	1,140	1,120	1,103	1,087	1,060	1,039	1.201
0,91	1,294	1.257	1.225	1,197	1,173	1,152	1,133	1,116	1,088	1,064	1,045
0,92	1,340	1,300	1,266	1,236	1,210	1,187	1,166	1,148	1,117	1,092	1.072
0,93	1,391	1,348	1,311	1,279	1,251	1,226	1,204	1,184	1,151	1,123	1,101
0,94	1,449	1,403	1,363	1,328	1,297	1,270	1,246	1,225	1,188	1,158	1,134
0.95	1,518	1,467	1,423	1.385	1,352	1,322	1,296	1,272	1,232	1,199	1,172
0,96	1,601	1,545	1,497	1,454	1,417	1,385	1,355	1,329	1,285	1,248	1,217
0,97	1,707	1,644	1,590	1,543	1,501	1,464	1,431	1,402	1,351	1,310	1,275
0,975	1,773	1,707	1,649	1,598	1,554	1,514	1,479	1,447	1,393	1,348	1,311
0,980	1,855	1,783	1,720	1,666	1,617	1,575	1,536	1,502	1,443	1,395	1,354
0,985	1,959	1,880	1,812	1,752	1,699	1,652	1,610	1,573	1,508	1,454	1,409
0,990	2,106	2,017	1,940	1,873	1,814	1,761	1,714	1,671	1,598	1,537	1,487
0,995	2,355	2,250	2,159	2,079	2,008	1,945	1,889	1,838	1.751	1,678	1,617
0,999	2,931	2,788	2,663	2,554	2,457	2.370	2,293	2,223	2,102	2,002	1,917

TABLA II. — $\Phi(\eta) = \eta - B(\eta)$ PARA VALORES DEL EXPONENTE

η	$n = 2,8$	$n = 3,0$	$n = 3,2$	$n = 3,4$	$n = 3,6$	$n = 3,8$	$n = 4,0$	$n = 4,2$
1,001	— 1,398	— 1,183	— 1,007	— 0,855	— 0,724	— 0,609	— 0,507	— 0,416
1,005	0,813	0,644	0,501	0,379	0,274	0,183	0,102	0,031
1,010	0,562	0,409	0,281	0,172	0,079	+ 0,003	+ 0,074	+ 0,137
1,015	0,413	0,271	0,151	0,050	+ 0,037	0,113	0,179	0,237
1,02	0,307	0,171	0,058	+ 0,038	0,120	0,192	0,254	0,309
1,03	0,156	0, 030	+ 0,075	0,164	0,240	0,305	0,362	0,412
1,04	0,046	+ 0,073	0,272	0,225	0,326	0,387	0,440	0,486
1,05	+ 0,040	0,154	0,248	0,327	0,394	0,452	0,502	0,546
1,06	0,112	0,222	0,312	0,388	0,452	0,507	0,554	0,596
1,07	0,174	0,280	0,367	0,440	0,501	0,554	0,599	0.639
1,08	0,229	0,331	0,415	0,485	0,545	0,595	0,639	0,677
1,09	0,278	0,377	0,459	0,527	0,584	0,633	0,675	0,711
1,10	0.323	0,419	0,499	0.564	0,620	0,667	0,708	0,743
1.11	0,374	0.458	0,535	0,599	0,653	0,699	0,738	0,772
1,12	0,402	0.494	0,569	0,632	0,684	0,728	0,766	0,799
1,13	0,438	0,528	0,601	0,662	0,713	0,756	0,793	0,825
1,14	0,471	0,559	0,631	0,690	0,740	0,782	0,818	0,849
1,15	0,503	0.589	0,660	0,718	0,766	0,807	0,842	0,872
1,16	0,533	0,618	0,687	0,743	0,791	0,831	0,865	0,894
1,17	0,562	0,645	0,712	0,768	0,814	0,853	0,887	0,915
1,18	0.589	0,671	0,737	0,792	0,837	0,875	0,908	0,936
1,19	0,616	0,696	0,761	0,815	0,859	0,896	0,928	0,955
1.20	0,641	0,720	0,784	0,837	0,880	0,917	0,948	0,974
1,22	0,689	0,766	0,828	0,879	0,921	0,956	0,985	1,011
1.24	0,735	0.809	0,869	0,918	0,959	0,992	1.021	1,045
1.26	0,778	0,850	0,909	0,956	0,995	1,027	1,055	1,078
1,28	0.819	0,889	0,946	0,992	1,030	1,061	1,087	1,110
1.30	0,858	0,927	0,982	1,026	1,063	1,093	1,119	1,140
1,32	0.896	0,963	1,016	1,060	1,095	1,124	1,149	1,170
1,34	0,932	0.998	1,050	1,092	1,126	1,155	1,178	1,198
1,36	0,967	1,031	1,082	1,123	1,156	1,184	1,207	1,226
1,38	1,002	1,064	1,114	1,154	1,186	1,213	1,235	1,255
1.40	1,035	1,096	1,144	1,183	1,215	1,241	1,262	1,289
1,42	1,067	1,127	1,174	1,212	1,243	1,268	1,289	1,306
1,44	1,099	1,158	1,204	1,241	1,271	1,295	1,315	1,332
1,46	1,130	1,187	1,233	1,259	1,298	1,331	1,341	1,357
1,48	1.160	1,217	1,261	1,296	1,324	1,347	1,367	1,382
1,50	1,190	1,245	1,289	1,323	1,351	1.373	1,392	1,407
1,55	1,262	1,315	1,356	1,389	1,415	1,436	1,453	1,467
1,60	1,331	1,382	1,421	1,452	1.477	1,497	1,513	1,526
1,65	1,399	1,447	1,485	1,514	1,537	1,556	1,571	1,583
1,70	1,464	1,511	1,547	1,575	1,597	1,614	1,628	1,640

TABLA II.—$\Phi(\eta) = \eta - B(\eta)$ PARA VALORES DEL EXPONENTE

(*Continuación*)

η	$n = 2,8$	$n = 3,0$	$n = 3,2$	$n = 3,4$	$n = 3,6$	$n = 3,8$	$n = 4,0$	$n = 4,2$
1,75	1,538	1,573	1,607	1,634	1,655	1,671	1,685	1,696
1,80	1,591	1,634	1,667	1,692	1,712	1,728	1,740	1,751
1,85	1,652	1,694	1,725	1,750	1,768	1,783	1,795	1,805
1,90	1,712	1,753	1,783	1,806	1,824	1,838	1,850	1,859
1,95	1,772	1,811	1,840	1,862	1,880	1,893	1,904	1,912
1,95	1,772	1,811	1,840	1,862	1,880	1,893	1,904	1,912
2,00	1,831	1,868	1,896	1,918	1,934	1,947	1,957	1,965
2,1	1,946	1,981	2,008	2,027	2,042	2,054	2,063	2,070
2,2	2,059	2,093	2,117	2,135	2,149	2,160	2,168	2,175
2,3	2,171	2,202	2,225	2,242	2,255	2,265	2,272	2,278
2,4	2,281	2,311	2,332	2,348	2,360	2,369	2,376	2,381
2,5	2,390	2,418	2,438	2,453	2,064	2,472	2,478	2.483
2,6	2,498	2,524	2,543	2,557	2,567	2,575	2,581	2,585
2,7	2,605	2,630	2,648	2,661	2,671	2,678	2,683	2,687
2,8	2,711	2,735	2,752	2,764	2,773	2,780	2,785	2,788
2,9	2,817	2,840	2,856	2,865	2,876	2,882	2,886	2,890
3,0	2,922	2,944	2,959	2,970	2,978	2,983	2,988	2,991
3,5	3,441	3,459	3,471	3,479	3,485	3,489	3,492	3,494
4,0	3,954	3,969	3,978	3,985	3,990	3,993	3,995	3,996
4,5	4,463	4,475	4,483	4 489	4,492	4,495	4,496	4,497
5,0	4,969	4,980	4,987	4,991	4,994	4,996	4,997	4,998
6,0	5,978	5,986	5,991	5,994	5,996	5,998	5,998	5,999
7,0	6,983	6,590	6,994	6,996	6,998	6,998	6,999	6,999
8,0	7,987	7,992	7,995	7,997	7,998	7,999	7,999	
9,0	8,989	8,994	8,896	8,998	8,999	8,999		
10,0	9,991	9,995	9,997	9,998	9,999	9,999		

LAMINAS

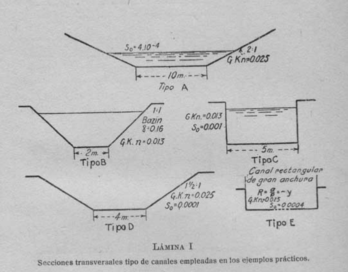


LÁMINA I

Secciones transversales tipo de canales empleadas en los ejemplos prácticos.

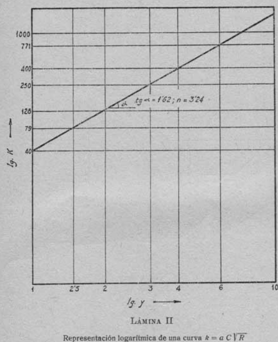


LÁMINA II

Representación logarítmica de una curva $k = a\, C \sqrt{R}$

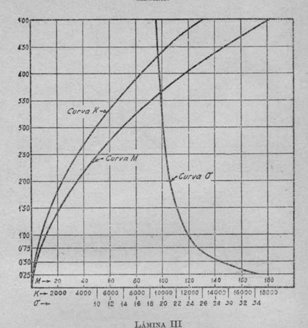


LÁMINA III

Características de la sección transversal de un canal del tipo A.
(Coeficiente de Bazin $y = 0{,}30$.)

	a	b	p	R	C	$\mathfrak{K} = aC\sqrt{R}$	$\mathfrak{M} = a\sqrt{a/b}$	p/b	g/C^2 10^{-4}	σ 10^{-4}
0,25	2.62	11.00	11,12	0,236	53,750	68,50777	1,281	1,011	34,019	34,283
0,50	5,50	12.00	12,24	0,449	58,903	217,08995	3,724	1,020	28,274	28,839
0,75	8,63	13.00	13,35	0,646	63,351	439,39816	7,033	1,027	24.443	25,103
1.00	12.00	14.00	14,47	0,829	65,438	714,97559	11.112	1,034	22,509	23,688
1,50	19,50	16.00	16.71	1,167	68,091	1434,26201	21,528	1,044	21.159	22,090
2,00	28,00	18,00	18,94	1.478	69,739	2366,85797	34,888	1,052	20,171	21,220
2.50	37,50	20.00	21.18	1,771	70,997	3542,83904	51,338	1,059	19,462	20,610
3,00	48,00	22.00	23,41	2,050	71,925	4940,38440	70,800	1,064	18,963	20,117
3,50	59,50	24,00	25,65	3,320	72,682	6586,76627	93,653	1,068	18,570	19,833
4.00	72,00	26.00	27,88	2,582	73,183	8372,72066	119,808	1,072	18,317	19,636
4,50	85,50	28,00	30,12	2,839	73,848	10638,46534	149,283	1,075	17,988	19,337
5.00	100,00	30,00	32,35	3,091	74.321	13066,37501	182,500	1,078	17,760	19,145

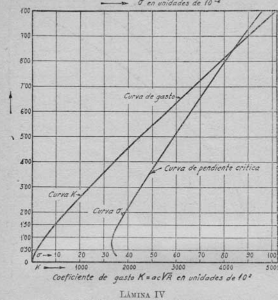


LÁMINA IV

Características de la sección transversal de un canal del tipo C
(y de Bazin = 0,30) b = 5 m.

y	a	p	R	C	$\mathfrak{K} = aC\sqrt{R}$	p/b	g/C^2 en unidades 10^{-4}	σ en unidades 10^{-4}
0,50	2,50	6,00	0,416	59,377	95,73057	1,20	27,825	33,39
0,75	3,75	6.50	0,577	72,370	177,66095	1,30	25,218	32,78
1,00	5,00	7,00	0,714	64,182	270,84804	1,40	23.815	33,34
1,25	6,25	7,50	0,834	65,467	373,76705	1,50	22.875	34,31
1,50	7,50	8,00	0,937	66.412	482,10131	1.60	22,242	35,59
1,75	8.75	8,50	1,030	67,150	596,31718	1,70	21,756	36,99
2,00	10.00	9,00	1,111	67,725	713,82150	1,80	21,388	38,50
3,00	15,00	11,00	1,363	69,207	1211,46854	2,20	20,482	45,06
4,00	20,00	13.00	1,538	70,054	1737,33920	2,60	19,990	51,97
5,00	25,00	15.00	1,666	70,588	2276,46300	3,00	19,688	59,06
6 00	30,00	17,00	1,764	70,968	2827,36512	3,40	19,478	66,23
7,00	35,00	19,00	1,842	71,247	3383,87627	3,80	19,326	73,44
8,00	40 00	21,00	1,905	71,464	3944,81280	4,20	19,209	80,68
9,00	45,00	23,00	1,956	71,634	4506,49494	4,60	19,117	87,94
10,00	50,00	25,00	2,000	71.776	5074,56320	5,00	10,042	95,21

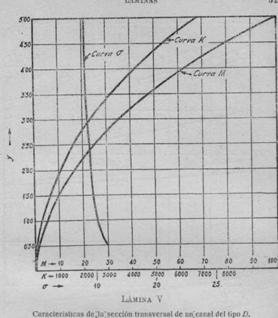


LÁMINA V

Características de la sección transversal de un canal del tipo *D*.

y	a	b	r	R	c	$\mathfrak{K} = ac\sqrt{R}$	$\mathfrak{M} = a\sqrt{a/b}$	σ en 10^{-4}
0,50	2,38	5,50	5,803	0,410	59,264	90,412	1,5655	29,470
0,75	3,84	6,25	6,704	0,573	62,30654	181,108	5,0099	27,10
1,00	5,50	7,00	7,606	0,723	64,31201	300,797	4,8751	25,77
1,25	7,34	7,75	8,507	0,863	65,76203	448,406	7,1432	24,90
1,50	9,38	8,50	9,408	0,997	66,90076	626,582	9,8528	24,26
2,00	14,00	10,00	11,211	1,249	68,58730	1073,048	16,5648	23,38
2,50	19,38	11,50	13,014	1,489	69,83121	1651,334	25,1572	22,77
3,00	25,50	13,00	14,817	1,721	70,80692	2368,555	35,7128	22,30
3,50	32,38	14,50	16,619	1,948	71,60813	3236,168	48,3854	21,93
4,00	40,00	16,00	18,422	2,171	72,28251	4260,041	63,2440	21,62
4,50	48,38	17,50	20,225	2,392	72,86592	5452,155	80,4414	21,35
5,00	57,50	19,00	22,028	2,610	73,37431	6815,830	100,0270	21,13

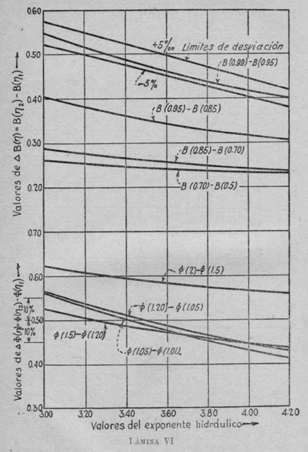


LÁMINA VI

Ilustración de la precisión de los cálculos realizados mediante las tablas de la *función del régimen variado*.

INDICE ALFABETICO

INDICE ALFABETICO

Los nombres de autores van de cursiva. Para otras referencias: véase «Apéndice I. Notas históricas y bibliográficas», pág. 303.

F

G

H

I

K

L

M

N

O

P

R

S

T

V

Z